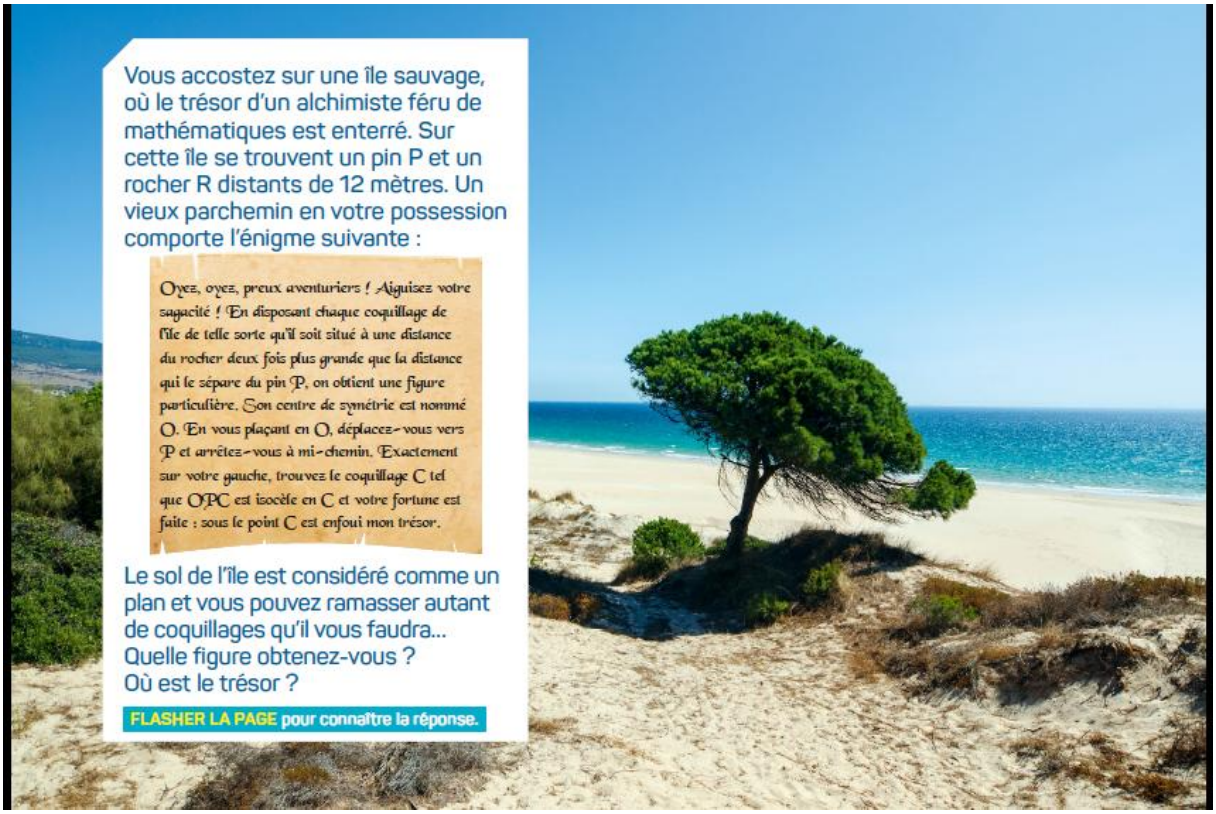
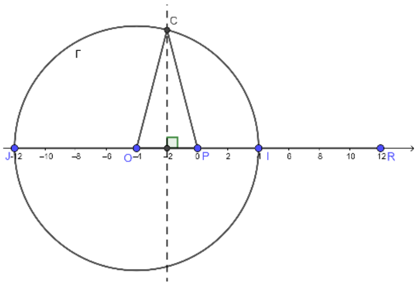
Chapitre 8 Géométrie dans le plan

Question d'ouverture



Réponse à la question d'ouverture



Pour élucider l'énigme, il faut déterminer l'ensemble des points M vérifiant : $MR = 2MP$, et comme il s'agit de longueurs, il est équivalent de résoudre $MR^2 = 4MP^2$ ou encore :

$MR^2 - 4MP^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MR} + 2\overrightarrow{MP}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MR} - 2\overrightarrow{MP}\right) = 0$.

L'astuce est de considérer les points I et J vérifiant : $\overrightarrow{IR} + 2\overrightarrow{IP} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{JR} - 2\overrightarrow{JP} = \vec{0}$. En utilisant la relation de Chasles, on peut construire ces deux points comme sur la figure ci-contre :

$\overrightarrow{RI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{PJ} = \overrightarrow{RP}$.

Ainsi, on obtient : $\overrightarrow{MR} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IR} + 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IP} = 3\overrightarrow{MI}$ et

$\overrightarrow{MR} - 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JR} - 2\overrightarrow{MJ} - 2\overrightarrow{JP} = -\overrightarrow{MJ}$ et l'équation devient :

$3\overrightarrow{MI} \cdot \left(-\overrightarrow{MJ}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$.

En conséquence, les points M forment le cercle de diamètre [IJ]. On note O le milieu de [IJ].

Il ne reste plus qu'à construire le triangle OPC isocèle en C tel que $\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OI}\right) = \theta[2\pi]$ et $\theta \in]0; \pi[$ comme sur la figure : le trésor se trouve au point C (ne pas oublier de se munir d'une pelle...)