p. 253

Vérifier ses connaissances

1 Questions à choix multiple

A. 2. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

Comme $u_0 = 300$ et $r = 2$, on a : $u_n = 300 + 2n$, que l'on peut écrire : $u_n = 2n + 300$.

B. 4. Augmenter une quantité de 2,3 % revient à la multiplier par $1 + \frac{2{,}3}{100} = 1{,}023$.
La raison de la suite géométrique qui peut modéliser cette évolution est 1,023.

C. 3. On note u_n la population au bout de n années. La suite u est géométrique de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $q = 1{,}01$ (car $1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$).

$u_{50} = 100 \times 1{,}01^{50} \approx 164$.

D. 3. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $1{,}15^n > 2$.

On réalise un tableau de valeurs avec une calculatrice.

Comme on cherche un nombre entier, on choisit un pas égal à 1.

Dans le menu Table, on entre : $Y_1 = 1{,}15^X$ (touches $\boxed{1.15}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{X,T,\theta}$ ou $\boxed{1.15}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{x,n,t}$).

Le plus petit entier naturel n tel que $1{,}15^n > 2$ est 5.

Le temps de doublement est **5 ans**.

X	Y1
0	1
1	1.15
2	1.3225
3	1.5209
4	1.749
5	2.0114
6	2.3131
7	2.66
8	3.059
9	3.5179
10	4.0456

2 Restituer les notions essentielles du cours

1. On peut choisir un modèle linéaire lorsque :
– le nuage de points qui représente l'évolution de la population évoque une droite ;
– la variation absolue d'une période à la suivante est presque constante.

2. On peut choisir un modèle exponentiel lorsque :
– le nuage de points qui représente l'évolution de la population évoque la courbe d'une exponentielle ;
– la variation relative (ou taux d'évolution) d'une période à la suivante est presque constante.

3. Le modèle de Malthus est un modèle exponentiel dont le taux annuel d'évolution est $t_n - t_m$ où t_n est le taux de natalité et t_m le taux de mortalité.

Il prévoit que l'effectif de la population croît vers l'infini si le taux de natalité est supérieur au taux de mortalité et qu'il décroît vers 0 sinon.

3 Comprendre un graphique

1. C'est le graphique b, car une suite qui modélise une croissance linéaire est représentée graphiquement par un nuage de points alignés.

2. u est une suite arithmétique, donc $u_n = u_0 + nr$, où r est la raison de la suite.

D'après le graphique, $u_0 = 1$ et $u_8 = 5$.

On en déduit : $u_n = 1 + nr$, et ainsi $u_8 = 1 + 8r$.

Puisque $u_8 = 5$, alors $1 + 8r = 5$, soit $r = 0{,}5$.

On a donc : $u_n = 1 + 0{,}5n$.

Ainsi, une équation de la droite qui passe par les points du nuage est $y = 0{,}5x + 1$.

4 Prévoir l'effectif d'une population

1. La variation absolue de cette population sur l'année est : 21 000 – 20 000 = 1 000.

2. Le taux d'évolution est : $\frac{21\,000 - 20\,000}{20\,000} = 0{,}05$, soit une augmentation de 5 %.

3. On note u_n la population en $2022 + n$.

Si on fait l'hypothèse d'un modèle linéaire, la suite u est arithmétique. Alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$, où r est la raison.

La population de la ville en 2022 est 20 000, soit $u_0 = 20\,000$.

$r = 1\,000$, car la variation absolue est constante et égale à la raison de la suite.

D'où : $u_n = 20\,000 + 1\,000n$.

L'année 2030 est l'année de rang $n = 8$.

$u_8 = 20\,000 + 1\,000 \times 8 = 28\,000$.

La population de cette ville en 2030 sera alors de 28 000 habitants.

4. On note u_n la population en $2022 + n$.

Si on fait l'hypothèse d'un modèle exponentiel, la suite u est géométrique. Alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$, où q est la raison.

La population de la ville en 2022 est 20 000, soit $u_0 = 20\,000$.

Le taux d'évolution t étant constant, égal à 0,05, on a alors $q = 1 + t = 1{,}05$.

D'où : $u_n = 20\,000 \times 1{,}05^n$.

L'année 2030 est l'année de rang $n = 8$.

$u_8 = 20\,000 \times 1{,}05^8 \approx 29\,549$.

La population de cette ville en 2030 sera alors d'environ 29 549 habitants.

5 Retour sur les problématiques

Nous conseillons de faire appel à la fiche méthode (rabat V) qui comporte des éléments pouvant guider les élèves dans leur expression orale.

• Comment les mathématiques permettent-elles de modéliser la dynamique des systèmes vivants afin de décrire leur évolution ?

Les mathématiques modélisent la dynamique des systèmes vivants à l'aide de suites. Les deux principaux modèles, le modèle linéaire et le modèle exponentiel, utilisent respectivement des suites arithmétiques et des suites géométriques. On reconnaît un modèle possible avec des propriétés numériques (liées à la variation absolue et au taux de variation) ou avec des propriétés graphiques.

• Quelles sont les différentes étapes de la démarche de modélisation mathématique ?

La première étape de cette démarche est le recueil de données.

À partir de ces données et à l'aide d'outils numériques ou graphiques, on propose un modèle qui est en adéquation avec ces données : ce modèle est en général choisi parmi des modèles connus.

Le modèle étant fixé, on peut alors l'utiliser pour faire des prévisions.