159 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{2x-1}$.

1. f s'écrit sous la forme $f = uv$ avec pour tout nombre réel x, $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^{2x-1}$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2e^{2x-1}$.
D'où, pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2xe^{2x-1} + x^2 \times 2e^{2x-1} = e^{2x-1}(2x + 2x^2)$$
$$= e^{2x-1}(2x \times x + 2x \times 1) = 2x(x+1)e^{2x-1}.$$

2. Pour tout nombre réel x, $2e^{2x-1} > 0$ (car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$), donc $f'(x)$ est du signe de $x(x+1)$.
On dresse le tableau de signes du produit $x(x+1)$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de x		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient : $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in]-\infty\,;\,-1] \cup [0;+\infty[$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in [-1;0]$.
Ainsi, f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1] \cup [0;+\infty[$ et décroissante sur $[-1;0]$.