111 **1.** Soit f la fonction définie sur I = [0 ; 2] par $f(x) = x(x^2+1) = x^3 + x$.
Donc la fonction F définie sur I par $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$ est une primitive de f sur I.
$\int_0^2 x(x^2+1)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{16}{4} + \frac{4}{2} = 6.$
La proposition est donc vraie.

Autre méthode :
Soit f la fonction définie sur I = [0 ; 2] par $f(x) = x(x^2+1)$.
Remarquons que f est de la forme $\frac{1}{2}u'u$ en posant, pour tout x dans I, $u(x) = x^2 + 1$.
Or une primitive de $\frac{1}{2}u'u$ sur I est $\frac{1}{4}u^2$, et donc la fonction F définie sur I par
$F(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^2$ est une primitive de f sur I.
$\int_0^2 x(x^2+1)dx = \left[\frac{1}{4}(x^2+1)^2\right]_0^2 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = 6.$
La proposition est donc vraie.

2. Soit f la fonction définie sur I = [0 ; π] par $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$.
Remarquons que f est de la forme $-u'u^2$ en posant, pour tout x dans I, $u(x) = \cos(x)$.
Or une primitive de $-u'u^2$ sur I est $-\frac{1}{3}u^3$, et donc la fonction F définie sur I par
$F(x) = -\frac{1}{3}\cos^3(x)$ est une primitive de f.
$\int_0^{\pi} \sin(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{3}\cos^3(\pi) - \left(-\frac{1}{3}\cos^3(0)\right) = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.
Donc la proposition est fausse.

3. Soit f la fonction définie sur I = [1 ; 2] par $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} = (x+1)^{-2}$.
Remarquons que f est de la forme $u'u^{-2}$ en posant, pour tout x dans I, $u(x) = x + 1$.
Or une primitive de $u'u^{-2}$ sur I est $-u^{-1}$, et donc la fonction F définie sur I par
$F(x) = -(x+1)^{-1} = -\frac{1}{x+1}$ est une primitive de f.
$\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_1^2 = \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$.
La proposition est donc vraie.

4. Soit f la fonction définie sur I = $\left[0 ; \frac{1}{3}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \sin(x)\cos^{-2}(x)$.
Remarquons que f est de la forme $-u'u^{-2}$ en posant, pour tout x dans I, $u(x) = \cos(x)$.
Or une primitive de $-u'u^{-2}$ sur I est u^{-1} , et donc la fonction F définie sur I par
$F(x) = \cos^{-1}(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ est une primitive de f.
$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{1}{\cos(0)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{3}\right)} - 1 \neq 1.$
Donc la proposition est fausse.