Chapitre 9
Lois à densité

Revoir des points essentiels

106 Pour montrer que g est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1], il faut montrer que g est continue et positive sur cet intervalle et que $\int_0^1 g(x)\,dx = 1$.

• La fonction g est continue sur l'intervalle [0 ; 1] car c'est une fonction polynôme de degré 3.

• Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $x^3 \geq 0$ donc $2x^3 \geq 0$.
De même, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $x^2 \geq 0$ donc $1{,}5x^2 \geq 0$.
Par somme, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $2x^3 + 1{,}5x^2 \geq 0$.
Donc la fonction g est positive sur [0 ; 1].

• Pour calculer $\int_0^1 g(x)\,dx$, il faut trouver une primitive de g.
Il suffit de prendre la fonction G définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :
$G(x) = 2 \times \frac{x^4}{4} + 1{,}5 \times \frac{x^3}{3}$, soit $G(x) = 0{,}5x^4 + 0{,}5x^3$.
Ainsi, $\int_0^1 g(x)\,dx = G(1) - G(0)$.
Or, $G(1) = 0{,}5 \times 1^4 + 0{,}5 \times 1^3 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$ et $G(0) = 0{,}5 \times 0^4 + 0{,}5 \times 0^3 = 0$.
Donc $\int_0^1 g(x)\,dx = 1 - 0 = 1$.
Donc g est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1].

107 **1.** Pour toute variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ et pour tout réel x positif, $P(X \leq x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$.
Ici, la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ,
donc $P(X \leq 9) = 1 - \mathrm{e}^{-9\lambda}$.
Ainsi, l'égalité $P(X \leq 9) = 0{,}8$ est équivalente à $1 - \mathrm{e}^{-9\lambda} = 0{,}8$.
Pour trouver le paramètre λ, il suffit alors de résoudre l'équation $1 - \mathrm{e}^{-9\lambda} = 0{,}8$ qui est équivalente à $1 - 0{,}8 = \mathrm{e}^{-9\lambda}$, soit $\mathrm{e}^{-9\lambda} = 0{,}2$.
En appliquant la fonction logarithme népérien aux deux membres de l'égalité, on obtient :
$-9\lambda = \ln\,(0{,}2)$.
Cette dernière équation est équivalente à $\lambda = \frac{\ln\,(0{,}2)}{-9}$.
À la calculatrice, on obtient $\lambda \approx 0{,}179$.

2. $P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7)$ soit $P(X > 7) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-7\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-7\lambda}$.

Or, d'après la question précédente, $\lambda = -\frac{\ln(0,2)}{9}$, donc $P(X > 7) = \mathrm{e}^{7\times\frac{\ln(0,2)}{9}}$,

soit $P(X > 7) \approx 0{,}286$.

La probabilité que le temps de téléchargement d'une vidéo soit compris entre 4 et 5 secondes est $P(4 \leq X \leq 5)$.

Or, pour toute variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ et pour tous réels a et b positifs tels que $a \leq b$, $P(a \leq X \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$.

Ici, avec $\lambda = \frac{\ln(0,2)}{-9}$, $a = 4$ et $b = 5$, on obtient :

$P(4 \leq X \leq 5) = \mathrm{e}^{4\times\frac{\ln(2)}{9}} - \mathrm{e}^{5\times\frac{\ln(2)}{9}}$, soit $P(4 \leq X \leq 5) \approx 0{,}080$.

Donc la probabilité que le temps de téléchargement d'une vidéo soit compris entre 4 et 5 secondes est environ 0,080.