98 **1.** L'équation réduite de T est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$.
On a donc $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$. Donc T a pour équation $y = x + 1$.

2. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f''(x) = (-e^{-x})(1 - x) + e^{-x} \times (-1) = e^{-x}(x - 2)$.

3. Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $x - 2$.
Ainsi :

- sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$: $f''(x) \leq 0$ et f est concave.
- sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$: $f''(x) \geq 0$ et f est convexe.

Par conséquent, sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$, C est en dessous de toutes ses tangentes.
T étant la tangente au point d'abscisse 0 alors C est en dessous de T sur $]-\infty ; 2]$.
Pour trouver la position entre C et T sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, on étudie le signe de $f(x) - (x + 1)$.
Pour $x \geq 2$, $f(x) - (x + 1) = xe^{-x} + 1 - x - 1 = x(e^{-x} - 1)$.
Comme $x \geq 2$, alors $x > 0$.
De plus, $x \geq 2 \Leftrightarrow -x \leq -2 \Leftrightarrow e^{-x} \leq e^{-2} \Leftrightarrow e^{-x} - 1 \leq e^{-2} - 1$.
Or, $e^{-2} - 1$ est une valeur strictement négative. Donc $e^{-x} - 1 \leq 0$.
Finalement pour $x \geq 2$, $f(x) - (x + 1) \leq 0$ et donc C est en dessous de T sur $[2 ; +\infty[$.
Pour conclure, C est en dessous de T sur $\mathbb{R}$.

4. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $F'(x) = -e^{-x}(-1 - x) + e^{-x} \times (-1) + 1 = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

5. L'aire A, en u.a., du domaine délimité par C, la tangente T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale $\int_0^1 (x + 1 - f(x))\mathrm{d}x$ puisque sur l'intervalle $[0 ; 1]$, C est en dessous de T.
Or,

$$\int_0^1 (x + 1 - f(x))\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x - F(x)\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 - F(1) - \big(-F(0)\big)$$

$$\int_0^1 (x + 1 - f(x))\mathrm{d}x = \frac{3}{2} - (-2e^{-1} + 1) + (-1) = -0{,}5 + 2e^{-1}.$$

Donc $A = -0{,}5 + 2e^{-1}$ u.a.