

113 1. L'équation différentielle $y' + 0,01y = 0,39$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,01$ et $b = 0,39$.

On cherche la solution particulière constante de **(E)** : $y' = -0,01y + 0,39$, de la forme $p(t) = k$.

Puisque la fonction p est une solution de l'équation différentielle **(E)**, on a :

$$p'(t) = -0,01p(t) + 0,39 \text{ pour tout réel } t.$$

$$\text{Or, } p'(t) = 0 \text{ donc } : 0,01 p(t) = 0,39, \text{ soit } p(t) = 39.$$

La solution constante de **(E)** est donc la fonction p telle que $p(t) = 39$.

L'équation différentielle $y' = -0,01y$ admet pour solutions les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,01t}$ avec C réel.

On en déduit que les solutions de **(E)** sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par une expression de la forme $f(t) = Ce^{-0,01t} + 39$, avec C constante réelle. On a donc $s(t) = Ce^{-0,01t} + 39$.

2. On sait que $s(0) = 0,12$ donc $0,12 = Ce^0 + 39$, c'est-à-dire $C = 0,12 - 39 = -38,88$.

$$\text{Donc } s(t) = -38,88e^{-0,01t} + 39.$$

3. On cherche t tel que $s(t) < 3,9$.

On peut dresser un tableau de valeurs avec la calculatrice, on trouve $s(10) \approx 3,82 < 3,9$ et $s(11) \approx 4,17 > 3,9$.

Donc le service technique a 10 minutes pour limiter l'impact de cet incident.

Une autre méthode consiste à résoudre l'inéquation : $-38,88e^{-0,01t} + 39 < 3,9$.

Cette inéquation équivaut à $-38,88e^{-0,01t} < -35,1$ donc $e^{-0,01t} > \frac{35,1}{38,88}$.

Cette équation équivaut à $-0,01t > \ln\left(\frac{3510}{3888}\right)$ soit $t < \frac{-1}{0,01} \ln\left(\frac{3510}{3888}\right)$.

Or $-100 \ln\left(\frac{3510}{3888}\right) \approx 10,23$, donc le service a 10 minutes pour limiter l'impact de cet incident.