113 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(15x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-63x+7) = +\infty$.

Donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. Pour tout réel x non nul,

$f(x) = -x^3 + 15x^2 - 63x + 7 = x^3\left(\frac{-x^3}{x^3} + \frac{15x^2}{x^3} - \frac{63x}{x^3} + \frac{7}{x^3}\right) = x^3\left(-1 + \frac{15}{x} - \frac{63}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)$.

Remarque :

On peut également développer $x^3\left(-1 + \frac{15}{x} - \frac{63}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1 + \frac{15}{x} - \frac{63}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right) = -1$.

Donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3. a. Pour tout réel x, $f'(x) = -3x^2 + 30x - 63$.

b. $f'(x) = -3x^2 + 30x - 63 = 3(-x^2 + 10x - 21)$.

On étudie le polynôme du second degré $-x^2 + 10x - 21$:

$\Delta = 10^2 - 4 \times (-1) \times (-21) = 16$.

$-x^2 + 10x - 21$ a deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-10-4}{2\times(-1)} = 7$ et $x_2 = \frac{-10+4}{2\times(-1)} = 3$.

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-74	$\nearrow$	-42	$\searrow$	$-\infty$