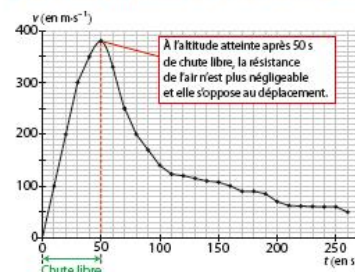


## Chapitre 5 Fonction exponentielle

### Question d'ouverture



Le 14 octobre 2012, l'Autrichien Felix Baumgartner a, le premier, franchi le mur du son en chute libre. Il a sauté d'une capsule à une altitude d'environ 39,4 km et n'a déclenché son parachute qu'au bout de 259 secondes, à 2,5 km d'altitude. La courbe ci-dessous représente la vitesse  $v(t)$  de Felix en fonction du temps  $t$  écoulé depuis le début de sa chute jusqu'à l'ouverture de son parachute. On observe clairement deux phases. Pour la deuxième, en admettant que la force de frottement est proportionnelle à la vitesse, on montre que la vitesse vérifie une relation du type : pour tout  $t$  positif,  $v'(t) + 0,5v(t) = 9,8$ .



Peut-on déterminer l'expression d'une telle fonction  $v$  ?

### Réponse à la question d'ouverture

On cherche une fonction  $v$  dérivable vérifiant l'équation suivante (E):  $v' + 0,5v = 9,8$ .

On remarque déjà que la fonction constante  $u$  égale à 19,6 est une solution de (E). En effet, on a  $u' = 0$  et donc  $u' + 0,5u = 0 + 0,5 \times 19,6 = 9,8$ .

Cette solution constante est une solution particulière de (E), qui physiquement correspond à une vitesse limite. Cherchons les éventuelles autres solutions de (E). Soit  $v$  une solution de (E). On a alors  $v' + 0,5v = 9,8$  mais aussi  $u' + 0,5u = 9,8$ . En soustrayant, on obtient  $v' - u' + 0,5(v - u) = 0$  et donc  $(v - u)' + 0,5(v - u) = 0$ . La fonction  $f = v - u$  vérifie donc l'équation  $f' = af$  avec  $a = -0,5$ . Or on a vu (ou verra) à l'exercice 101, p.195 que  $f$  est alors proportionnelle à la fonction  $t \mapsto \exp(at)$ .

On vient donc de prouver que la fonction recherchée  $v$  est de la forme  $v(t) = k \exp(-0,5t) + 19,6$  avec  $k$  une constante que l'on détermine grâce à une condition initiale.

**Remarque** : ce modèle repose sur l'hypothèse d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse, ce qui n'est pas réaliste... En effet, la force de frottement de l'air est plutôt proportionnelle au carré de la vitesse, la fonction  $v$  vérifie alors une relation du type  $v' + \frac{k}{m} v^2 = 9,8$  avec  $m$  la masse de Felix. On résout alors ce type d'équation différentielle avec des méthodes numériques du type méthode d'Euler.