

1. Généralités sur les probabilités

Dans tout le chapitre, on considère une expérience aléatoire.

Expérience aléatoire – Loi de probabilité

Vocabulaire

$\emptyset$ est l'événement impossible : il ne se réalise jamais.
 Ω est l'événement certain : il est toujours réalisé.

Vocabulaire

Lorsqu'une issue appartient à un événement, on dit qu'elle **réalise** cet événement.

DÉFINITIONS • L'univers est l'ensemble des issues de l'expérience aléatoire. Il est noté Ω .

- Un événement A est un ensemble d'issues c'est-à-dire une partie de l'univers Ω .

DÉFINITIONS • Définir une loi de probabilité sur l'univers $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$, c'est associer à chaque issue e_i un réel p_i de l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

- Le réel p_i est appelé **probabilité de l'issue e_i** .
- La **probabilité** d'un événement A , notée $P(A)$, est la **somme** des probabilités p_i des issues qui le réalisent.

PROPRIÉTÉS Pour tout événement A d'une expérience aléatoire dont l'univers est Ω , on a :

$$0 \leq P(A) \leq 1 ; P(\Omega) = 1 \text{ et } P(\emptyset) = 0.$$

REMARQUE : Une loi de probabilité **ne se démontre pas** : c'est une hypothèse du modèle choisi. Ce modèle peut résulter d'une hypothèse d'équiprobabilité ou être construit à partir des fréquences observées lors de la répétition de l'expérience aléatoire un grand nombre de fois, en s'appuyant sur la **loi des grands nombres**.

DÉFINITION On dit qu'on est en **situation d'équiprobabilité** lorsque toutes les issues ont la même probabilité.

PROPRIÉTÉ Pour la loi d'équiprobabilité sur Ω la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

EXEMPLE : On lance un dé cubique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Puisque le dé est équilibré, on est en situation d'équiprobabilité et $\text{card}(\Omega) = 6$.

Si A est l'événement défini par $A = \{2 ; 5\}$, alors $P(A) = \frac{2}{6}$ soit $P(A) = \frac{1}{3}$.

À noter

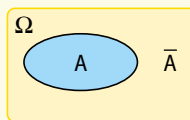
Le choix du modèle d'équiprobabilité résulte parfois d'une hypothèse (dé équilibré ; tirage au hasard...)

Opérations sur les événements

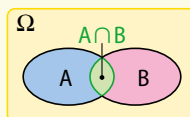
On considère deux événements A et B d'un même univers Ω .

DÉFINITIONS

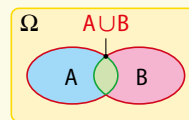
- L'événement contraire de A , noté $\bar{A}$, est constitué des issues n'appartenant pas à A .



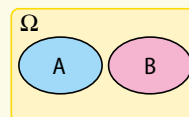
- L'événement « A et B », noté $A \cap B$, est constitué des issues qui appartiennent à ces deux événements.



- L'événement « A ou B », noté $A \cup B$, est constitué des issues qui appartiennent à au moins un de ces deux événements.



- Les événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B$ est l'événement impossible, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.



À noter

A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

PROPRIÉTÉS • $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ c'est-à-dire $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

CAPACITÉ 1

Voir exercices

52 105

Construire un modèle à partir des fréquences observées

Dans un jeu vidéo, Lucas est opposé à un des adversaires suivants :

D_1 et D_2 sont des Dragons respectivement de niveaux 1 et 2.

G_1 , G_2 et G_3 sont des Gobelins respectivement de niveaux 1, 2 et 3.

Les fréquences d'apparition de ses adversaires, observées à partir d'un grand nombre de parties sont données ci-contre.

Adversaire	D_1	D_2	G_1	G_2	G_3
Fréquence	0,25	0,15	0,22	0,27	0,11

Lucas commence une partie. On s'intéresse à l'adversaire qui apparaît.

1. Donner un univers modélisant cette expérience en précisant les probabilités des issues.
2. Déterminer la probabilité de l'événement A : « l'adversaire est un Gobelin ».
3. Déterminer la probabilité de l'événement B : « l'adversaire est de niveau 1 ».

Méthode

Pour estimer des probabilités, on peut utiliser les fréquences observées sur un grand nombre d'expériences.

Solution commentée

1. Les issues possibles sont D_1 , D_2 , G_1 , G_2 et G_3 donc on choisit comme univers $\Omega = \{D_1, D_2, G_1, G_2, G_3\}$. Comme les fréquences sont observées à partir d'un grand nombre de parties, on considère qu'elles donnent une bonne estimation des probabilités des issues.
2. On a $A = \{G_1, G_2, G_3\}$ donc $P(A) = P(G_1) + P(G_2) + P(G_3) = 0,22 + 0,27 + 0,11$ soit $P(A) = 0,6$.
3. On a $B = \{D_1, G_1\}$ donc $P(B) = P(D_1) + P(G_1) = 0,25 + 0,22$ soit $P(B) = 0,47$.

CAPACITÉ 2

Voir exercices

59 106 110

Utiliser le modèle d'équiprobabilité

On choisit au hasard une personne dans un groupe dont la répartition est donnée ci-contre.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A : « la personne est un homme ».
2. Déterminer la probabilité de l'événement B : « la personne est mineure ».

	Mineure	Majeure	Total
Femmes	18	42	60
Hommes	12	24	36
Total	30	66	96

Méthode

En situation d'équiprobabilité, on détermine d'abord le nombre d'éléments de l'univers.

Solution

1. La personne étant choisie au hasard, on peut choisir le modèle de l'équiprobabilité. L'univers Ω est l'ensemble des 96 personnes donc $\text{card}(\Omega) = 96$. D'après le tableau, l'événement A a 36 éléments donc $\text{card}(A) = 36$. Donc $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{36}{96} = 0,375$.
2. L'événement B a 30 éléments donc $\text{card}(B) = 30$. Donc $P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{30}{96} = 0,3125$.

CAPACITÉ 3

Voir exercices

65 107

Exploiter la formule $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Dans un club multisport, la probabilité qu'un adhérent pratique l'athlétisme est 0,3, la probabilité qu'il pratique le basket est 0,15 et la probabilité qu'il pratique ces deux sports est 0,05.

On choisit un adhérent au hasard. On note A l'événement « la personne pratique l'athlétisme » et B l'événement « la personne pratique le basket ».

1. Préciser la probabilité de l'événement A, puis la probabilité de l'événement B.
2. Écrire à l'aide de A et de B l'événement « l'adhérent pratique les deux sports », puis donner la probabilité de cet événement.
3. Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$, puis déterminer sa probabilité.

Solution commentée

1. D'après l'énoncé, on a $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,15$.
2. L'événement « l'adhérent pratique les deux sports » correspond à la réalisation des deux événements A et B ; il s'agit de l'événement $A \cap B$. D'après l'énoncé, $P(A \cap B) = 0,05$.
3. L'événement $A \cup B$ est réalisé lorsqu'au moins un des deux événements A ou B est réalisé : il s'agit de l'événement « l'adhérent pratique au moins un des deux sports ».
La formule $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ donne $P(A \cup B) + 0,05 = 0,3 + 0,15$ soit $P(A \cup B) = 0,45 - 0,05$ donc $P(A \cup B) = 0,4$.

Conseil

La formule utilisée peut selon les cas servir à calculer $P(A \cup B)$ ou $P(A \cap B)$.

2. Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle de B sachant A

On considère un univers Ω muni d'une probabilité P .

DÉFINITION

Soit A et B deux événements de l'univers Ω , A étant de probabilité non nulle ($P(A) \neq 0$). La probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A est réalisé, appelée **probabilité conditionnelle de B sachant A**, est le nombre noté $P_A(B)$, défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Notation

$P_A(B)$ se note parfois $P(B/A)$.

EXEMPLE : Dans une région, les services météorologiques affirment que, chaque jour :

- la probabilité de l'événement A « le ciel est très nuageux le matin » est égale à 0,3 ;
- la probabilité de l'événement B « il pleut dans l'après-midi » est égale à 0,25 ;

De plus, la probabilité que le ciel soit très nuageux le matin et qu'il pleuve dans l'après-midi est égale à 0,18. Autrement dit : $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,25$ et $P(A \cap B) = 0,18$.

La probabilité qu'il pleuve dans l'après-midi sachant que le ciel est très nuageux le matin est

$$\text{alors donnée par : } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,3} = 0,6.$$

Ainsi, lorsque le ciel est très nuageux le matin, il pleut dans l'après-midi dans 60 % des cas.

REMARQUE : Il s'agit d'une nouvelle probabilité, dite **probabilité conditionnelle**.

Elle a donc toutes les propriétés d'une probabilité.

PROPRIÉTÉS Soit deux événements A et B tels que $P(A) \neq 0$. Alors :

$$0 \leq P_A(B) \leq 1 \text{ et } P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1.$$

EXEMPLE : On reprend l'exemple précédent.

On a $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$ donc $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$ soit $P_A(\bar{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$.

La probabilité qu'il ne pleuve pas l'après-midi un jour où le ciel est très nuageux le matin est égale à 0,4.

PROPRIÉTÉ Probabilité d'une intersection

Soit A et B deux événements, si $P(A) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

DÉMONSTRATION Cette propriété se déduit de la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ implique } P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Équiprobabilité et probabilité conditionnelle

PROPRIÉTÉ Soit A et B deux événements tels que $\text{card}(A) \neq 0$, alors : $P_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$.

REMARQUE : En situation d'équiprobabilité, une probabilité conditionnelle est une fréquence conditionnelle.

EXEMPLE : Dans un lycée, il y a 400 élèves, dont 300 sont demi-pensionnaires.

Parmi ces demi-pensionnaires, 180 sont des filles.

On choisit un élève au hasard. On note A l'événement : « l'élève est demi-pensionnaire » et B l'événement : « l'élève est une fille ».

La probabilité conditionnelle de B sachant A est : $P_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$.

$$\text{Or : } \text{card}(A \cap B) = 180 \text{ et } \text{card}(A) = 300. \text{ Ainsi : } P_A(B) = \frac{180}{300} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Cette probabilité est égale à la fréquence conditionnelle des filles parmi les demi-pensionnaires

CAPACITÉ 4

Voir exercices

77 108 111

Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement

On choisit une personne au hasard parmi la clientèle d'un magasin.

On note A l'événement « la personne choisie a effectué un achat », F l'événement « la personne choisie est une femme » et H l'événement « la personne choisie est un homme ».

1. Interpréter à l'aide de probabilités chacune des informations suivantes :

a. « 72 % des clients ont effectué un achat »

b. « 54 % des clients sont des femmes ayant effectué un achat »

c. « Parmi les clients hommes, 90 % ont effectué un achat »

2. Quelle information a-t-on sur la clientèle du magasin grâce à chacune des probabilités suivantes ? a. $P(H) = 0,2$ b. $P(H \cap \bar{A}) = 0,02$ c. $P_A(F) = 0,75$

Conseil

Dans un problème de probabilité conditionnelle, il faut identifier les mots-clés (« et », « parmi », « sachant », etc.) et les ensembles de référence.

Solution commentée

- Comme on choisit un client au hasard, l'information a se traduit par la probabilité : $P(A) = 0,72$. Pour l'information b, on s'intéresse aux clients qui sont des femmes et qui ont effectué un achat. Cela peut être interprété par la probabilité : $P(F \cap A) = 0,54$. Concernant l'information c, on sait que le client est un homme et on s'intéresse, parmi eux, à ceux qui ont effectué un achat. Cela peut être interprété par la probabilité : $P_H(A) = 0,9$.
- a. $P(H) = 0,2$ indique que 20 % des clients du magasin sont des hommes.
b. $P(H \cap \bar{A}) = 0,02$ indique que 2 % des clients sont des hommes qui n'ont pas effectué d'achat.
c. $P_A(F) = 0,75$ permet de savoir que parmi les clients ayant effectué un achat, 75 % sont des femmes.
Ici, l'univers de départ est l'ensemble des clients ayant effectué un achat.

CAPACITÉ 5

Voir exercices

84 110

Calculer des probabilités conditionnelles à partir d'un tableau croisé d'effectifs

On demande à un échantillon de clients d'un fournisseur de téléphonie si, en cas de problème, ils préfèrent contacter le service après-vente (SAV) par téléphone ou s'ils préfèrent se rendre directement en boutique. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-contre.

	+18 ans	-18 ans	Total
En boutique	110	36	146
Par téléphone	40	64	104
Total	150	100	250

On choisit, au hasard, un client de l'échantillon.

- Déterminer la probabilité des événements A « le client est un adulte de 18 ans ou plus » et B « le client préfère se rendre en boutique ».
- Sachant que le client choisi préfère se rendre en boutique, quelle est la probabilité que ce client soit un adulte ?
- Le client choisi est un adolescent de moins de 18 ans, calculer la probabilité qu'il préfère contacter le SAV par téléphone.

Méthode

Dans une situation d'équiprobabilité, pour calculer la probabilité conditionnelle $P_B(A)$, on commence par déterminer $\text{card}(A \cap B)$ et $\text{card}(B)$.

Solution commentée

- Comme le client est choisi au hasard, on est en situation d'équiprobabilité. L'échantillon comporte 250 clients, donc $\text{card}(\Omega) = 250$. Il y a 150 adultes dans cet échantillon, donc $\text{card}(A) = 150$ et $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$. De même $\text{card}(B) = 146$, donc $P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{146}{250} = \frac{73}{125}$.
- On cherche $P_B(A)$. D'après le tableau, $\text{card}(A \cap B) = 110$. On a donc $P_B(A) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = \frac{110}{146} = \frac{55}{73}$.
- On cherche $P_{\bar{A}}(\bar{B})$. D'après le tableau, $\text{card}(\bar{A}) = 100$ et $\text{card}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 64$. On en déduit que : $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{\text{card}(\bar{A} \cap \bar{B})}{\text{card}(\bar{A})} = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$.

3. Arbres pondérés et tableaux de probabilités

Vocabulaire

On parle d'**arbre pondéré** ou d'**arbre de probabilités**.

À noter

Sur chacun des niveaux, il est possible d'avoir plus de deux branches.



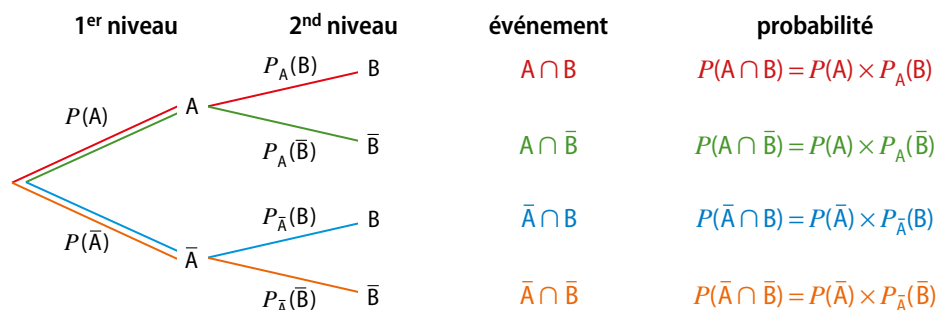
ANIMATION

De l'arbre de dénombrement à l'arbre pondéré

lienbordas.fr/741473_340

Arbres pondérés

On peut modéliser une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles dans un univers Ω par un **arbre pondéré**. Pour cela, on envisage deux niveaux de branches : le premier qui indique la probabilité des événements A et $\bar{A}$, et le second qui indique les probabilités conditionnelles de la réalisation de B selon celle de A .



Une **branche** relie deux événements. Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante. Par exemple, la **probabilité de la branche reliant A à B** est $P_A(B)$.

Un **chemin** est une suite de branches. Il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin. Sa probabilité est la probabilité de l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.

Un **nœud** est le point de départ d'une ou de plusieurs branches.

À noter

La règle (1) résulte de la formule

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1.$$

RÈGLES

(1) La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

(2) La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches composant ce chemin.

Tableaux de probabilités

Un tableau à double entrée permet de déterminer des probabilités conditionnelles. La probabilité $P(A \cap B)$ de l'événement $A \cap B$ se situe à l'intersection de la ligne « A » et de la colonne « B ». La dernière colonne et la dernière ligne du tableau contiennent les probabilités de chaque événement A , $\bar{A}$, B et $\bar{B}$.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

$P_A(B)$ est alors le quotient des valeurs de $P(A \cap B)$ et de $P(A)$ lues dans le tableau.

L'utilisation d'un tel tableau peut être pertinente lorsqu'on connaît la probabilité de deux événements et la probabilité de leur intersection.

EXEMPLE : Une auto-école a étudié les résultats de ses candidats à l'examen du permis de conduire. On considère les événements suivants :

- A : « le candidat a suivi une conduite accompagnée » ;
- B : « le candidat a obtenu son permis du premier coup ».

Des études statistiques permettent d'affirmer que $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,56$ et $P(A \cap B) = 0,42$.

On place ces données dans un tableau que l'on complète comme un tableau croisé d'effectifs dont l'effectif total serait égal à 1.

On peut ensuite calculer n'importe quelle probabilité conditionnelle en lien avec les événements A et B.

$$\text{Par exemple } P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{0,26}{0,4} = 0,65.$$

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,42	0,18	0,6
$\bar{A}$	0,14	0,26	0,4
Total	0,56	0,44	1

CAPACITÉ 6

Voir exercices

88 108

Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée

À l'issue d'une compétition, des cyclistes passent un contrôle antidopage. On estime que 25 % des cyclistes sont dopés. On sait aussi, avec le test utilisé, qu'un cycliste dopé est contrôlé positif dans 90 % des cas, alors qu'un cycliste non dopé est contrôlé positif dans 8 % des cas.

On choisit au hasard un des cyclistes de la compétition que l'on soumet au test antidopage.

On considère les événements :

- D : « le sportif choisi est dopé » ;
- T : « le sportif choisi a un test positif » ;
- N : « le sportif choisi a un test négatif ».

Décrire cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

Méthode

Pour construire un arbre pondéré, on interprète et traduit les informations de l'énoncé en distinguant bien les probabilités conditionnelles.

Solution commentée

La phrase « on estime que 25 % des cyclistes sont dopés » donne la probabilité de l'événement D, soit $P(D) = 0,25$.

On en déduit que $P(\bar{D}) = 1 - P(D)$, soit $P(\bar{D}) = 0,75$.

Ces probabilités figurent sur chaque branche au premier niveau de l'arbre.

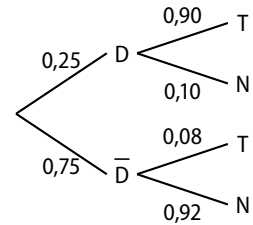
De même, les informations « un cycliste dopé est contrôlé positif dans 90 % des cas » et « un cycliste non dopé est contrôlé positif dans 8 % des cas » peuvent s'écrire sous forme de probabilités conditionnelles : $P_D(T) = 0,90$ et $P_{\bar{D}}(T) = 0,08$.

On en déduit que :

$P_D(N) = 1 - P_D(T) = 1 - 0,90$, soit $P_D(N) = 0,10$.

$P_{\bar{D}}(N) = 1 - P_{\bar{D}}(T) = 1 - 0,08$, soit $P_{\bar{D}}(N) = 0,92$.

Ces probabilités conditionnelles figurent au second niveau de l'arbre.



CAPACITÉ 7

Voir exercices

97 111

Construire un tableau en lien avec une situation donnée

Parmi la clientèle d'un opérateur de TV par Internet, une enquête montre que 80 % des abonnés ont souscrit à l'option « Sport Live », 75 % des abonnés ont souscrit à l'option « Cinéma – Séries » et 60 % des abonnés ont souscrit aux deux options.

On choisit au hasard un des clients de l'opérateur de TV et on considère les événements S « l'abonné choisi a souscrit à l'option Sport Live » et C « l'abonné choisi a souscrit à l'option Cinéma – Séries ».

- Décrire l'expérience aléatoire à l'aide d'un tableau de probabilités.

Méthode

Pour construire un tableau de probabilités, on commence par placer les différents événements sur la première ligne et sur la première colonne du tableau.

Solution commentée

La première colonne du tableau correspond au choix, ou non, de l'option « Sport Live » et la première ligne du tableau correspond au choix, ou non, de l'option « Cinéma – Séries ».

Les probabilités des événements S et $\bar{S}$ figurent alors dans la dernière colonne et celles des événements C et $\bar{C}$ dans la dernière ligne.

Les autres cases du tableau correspondent aux probabilités d'intersections des différents événements.

On peut commencer à placer les trois valeurs données dans l'énoncé :

$P(S) = 0,8$, $P(C) = 0,75$ et $P(S \cap C) = 0,6$.

On peut ensuite placer les valeurs suivantes :

$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 0,2$ et $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 0,25$.

On termine par le calcul des probabilités des intersections :

$P(\bar{S} \cap C) = 0,75 - 0,6 = 0,15$

$P(S \cap \bar{C}) = 0,8 - 0,6 = 0,2$

$P(\bar{S} \cap \bar{C}) = 0,25 - 0,2 = 0,05$

	C	$\bar{C}$	Total
S	0,6	0,2	0,8
$\bar{S}$	0,15	0,05	0,2
Total	0,75	0,25	1

CAPACITÉ 8

Voir exercices

90 109

Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités et de probabilités conditionnelles

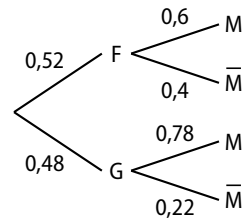
Dans un lycée, on s'intéresse au choix de la spécialité mathématiques par les élèves de Première. On choisit au hasard un élève de Première de ce lycée.

On considère les événements suivants :

- F : « l'élève choisi est une fille » ;
- G : « l'élève choisi est un garçon » ;
- M : « l'élève choisi suit la spécialité mathématiques ».

L'arbre pondéré ci-contre modélise cette situation.

- Interpréter en termes de probabilités les pondérations 0,52 ; 0,6 et 0,22 figurant sur les branches de cet arbre de probabilités.



Méthode

Pour interpréter la pondération sur une branche d'un arbre, on commence par déterminer si la branche est de premier ou de second niveau.

Solution commentée

Le nombre 0,52 est la pondération d'une branche de premier niveau, celle qui mène à l'événement F. Donc il s'agit de la probabilité de cet événement : $P(F) = 0,52$.

Les nombres 0,6 et 0,22 sont situés sur des branches de second niveau, il s'agit donc de probabilités conditionnelles.

Le nombre 0,6 est situé sur la branche qui mène de l'événement F à l'événement M.

Donc il s'agit de la probabilité conditionnelle de M sachant F : $P_F(M) = 0,6$.

Le nombre 0,22 est situé sur la branche qui mène de l'événement G à l'événement $\bar{M}$.

Donc il s'agit de la probabilité conditionnelle de $\bar{M}$ sachant G : $P_G(\bar{M}) = 0,22$.

CAPACITÉ 9

Voir exercices

92 108

Utiliser un arbre pondéré pour calculer une probabilité

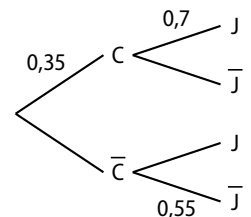
Dans une ville, on choisit un foyer au hasard.

On note C l'événement : « le foyer possède un chat »

et J l'événement : « le foyer possède un jardin ».

L'arbre pondéré ci-contre modélise cette situation.

1. Calculer $P(\bar{C})$.
2. Calculer $P_C(\bar{J})$.
3. Calculer la probabilité que le foyer possède un jardin sachant qu'il ne possède pas de chat.
4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.



Méthode

Pour calculer une probabilité manquante dans un arbre, on peut utiliser le fait que la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Solution commentée

1. On a $P(\bar{C}) = 1 - P(C)$, donc $P(\bar{C}) = 1 - 0,35 = 0,65$.

2. D'après l'arbre, on a $P_C(J) = 0,7$.

On utilise la règle « La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1 ». On a alors $P_C(\bar{J}) + P_C(J) = 1$ soit $P_C(\bar{J}) + 0,7 = 1$ d'où $P_C(\bar{J}) = 0,3$.

3. On doit calculer $P_{\bar{C}}(J)$. On utilise la même règle que précédemment.

On a donc $P_{\bar{C}}(J) + P_{\bar{C}}(\bar{J}) = 1$. Or d'après l'arbre, $P_{\bar{C}}(\bar{J}) = 0,55$.

On obtient alors $P_{\bar{C}}(J) + 0,55 = 1$, d'où $P_{\bar{C}}(J) = 0,45$.

À noter que cette règle peut également être utilisée à la question 1.

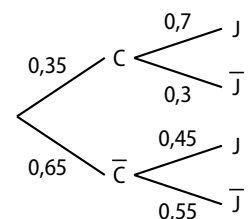
4. On a $P(\bar{C}) = 0,65$.

On inscrit cette probabilité sur la branche menant à l'événement $\bar{C}$.

$P_C(\bar{J}) = 0,3$: on inscrit cette probabilité sur la branche menant de C à $\bar{J}$.

$P_{\bar{C}}(J) = 0,45$: on inscrit cette probabilité sur la branche menant de $\bar{C}$ à J.

On obtient alors l'arbre complet ci-contre.



CAPACITÉ 10

Voir exercices

94 108 109

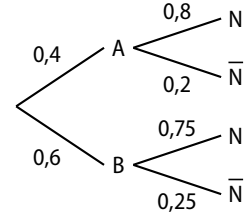
Calculer la probabilité de l'intersection de deux événements à l'aide d'un arbre pondéré

Une centrale d'achat se procure la plupart des vêtements qu'elle vend chez un fournisseur A et le reste de son stock chez un fournisseur B. Certains de ces vêtements sont vendus à un prix normal et le reste, présentant des défauts, est vendu à un prix réduit.

On considère les événements suivants :

- A : « le vêtement provient du fournisseur A » ;
- B : « le vêtement provient du fournisseur B » ;
- N : « le vêtement est vendu à un prix normal ».

On choisit au hasard un vêtement dans les entrepôts de la centrale d'achat. L'arbre ci-contre modélise la situation.



1. a. Donner la valeur de chacune des probabilités $P(A)$ et $P_A(N)$.
b. En déduire la probabilité que le vêtement provienne du fournisseur A et soit vendu à prix normal.
2. a. Identifier le chemin représentant l'intersection des événements B et N.
b. Calculer la probabilité que le vêtement provienne du fournisseur B et soit vendu à prix normal.

Méthode

Pour calculer la probabilité d'une intersection d'événements à l'aide d'un arbre, on cherche le chemin qui représente cette intersection.

Solution

1. a. $P(A)$ est la probabilité inscrite sur la branche qui mène à A, donc $P(A) = 0,4$.
 $P_A(N)$ est la probabilité inscrite sur la branche qui mène de A à N, donc $P_A(N) = 0,8$.
b. La probabilité cherchée est $P(A \cap N)$. On a $P(A \cap N) = P(A) \times P_A(N) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$: la probabilité que le vêtement provienne du fournisseur A et soit vendu à prix normal est 0,32.
2. a. Le chemin représentant l'intersection des événements B et N est le chemin constitué de la branche menant à B puis de la branche menant de B à N.
b. On doit déterminer $P(B \cap N)$. On peut utiliser la règle (2) du cours : la probabilité du chemin menant à B puis à N, c'est-à-dire $P(B \cap N)$, est égale au produit des probabilités rencontrées sur ce chemin : d'où $P(B \cap N) = 0,6 \times 0,75$ et donc $P(B \cap N) = 0,45$.

CAPACITÉ 11

Voir exercices

96 108

Distinguer en situation $P_A(B)$ et $P_B(A)$

Un test est utilisé pour dépister une maladie qui touche 0,2 % de la population.

Lorsqu'une personne est atteinte par la maladie, le test est positif dans 98 % des cas.

Lorsqu'une personne n'est pas atteinte par la maladie, le test est positif dans 3 % des cas.

On choisit au hasard une personne dans la population que l'on soumet au test.

On note M l'événement : « la personne est atteinte par la maladie » et T l'événement : « le test est positif ». On parle de faux positif lorsque le test est positif alors que la personne n'est pas malade.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité que le test soit positif et que la personne ne soit pas malade.
3. On admet que $P(T) = 0,0319$.
a. Calculer $P_T(\bar{M})$, en déduire $P_T(M)$.
b. Interpréter et commenter les résultats.

Méthode

Pour calculer la probabilité d'une intersection d'événements à l'aide d'un arbre, on cherche le chemin qui représente cette intersection.

Solution

1. D'après l'énoncé $P(M) = 0,002$; $P_M(T) = 0,98$ et $P_{\bar{M}}(T) = 0,03$.
On construit alors l'arbre ci-contre
2. On doit déterminer $P(T \cap \bar{M})$: il s'agit de la probabilité du chemin menant à $\bar{M}$ puis à T. On a donc $P(T \cap \bar{M}) = 0,998 \times 0,03 = 0,02994$.
3. a. $P_T(\bar{M}) = \frac{P(T \cap \bar{M})}{P(T)} = \frac{0,02994}{0,0319} \approx 0,94$ à 0,01 près.

On a donc $P_T(M) = 1 - P_T(\bar{M}) \approx 0,06$ à 0,01 près.

- b. La probabilité $P_T(\bar{M}) \approx 0,94$ indique que parmi les personnes dont le test est positif, environ 94 % ne sont pas atteintes par la maladie. Ce sont des faux positifs.
La probabilité $P_T(M) \approx 0,06$ indique que parmi les personnes dont le test est positif, environ 6 % sont réellement atteintes par la maladie. Il ne faut pas confondre cette probabilité avec la probabilité $P_M(T)$ qui correspond à la proportion de tests positifs parmi les personnes malades (98 %).

