

$$19 \quad 1. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$2. \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{9 + 1}$$

$$= \sqrt{10}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9}$$

$$= \sqrt{10}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16}$$

$$= \sqrt{20}$$

$$= \sqrt{4 \times 5}$$

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{5}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

3. On a $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{10}$ donc le triangle ABC est isocèle en B.

On a : $AC^2 = 20$ et $AB^2 + BC^2 = 10 + 10 = 20$ donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

4. Soit $D(x ; y)$. ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire si, et seulement si, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égales.

$$\begin{aligned} \text{Or } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} &= \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 0 - x \\ 4 - y \end{pmatrix} \\ &= \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -x \\ 4 - y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc d'une part $3 = -x$ donc $x = -3$ et d'autre part $1 = 4 - y$ donc $y = 3$.

Conclusion : Si $D(-3 ; 3)$ alors ABCD est un parallélogramme (et un carré puisqu'il a un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur d'après la question précédente).