

175 1. On a $M \in [AB]$, $AM = 1$ et $AB = 3$ donc $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

On a $Q \in [AD]$, $DQ = 1$ et $AD = 3$ donc $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{QD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

De même, on obtient $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{PD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Or ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ d'où $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} \\ &= -\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MQ} &= \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \cdot \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \cdot \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) \\ &= -\frac{2}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{9}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Or ABCD est un carré donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $AB = AD$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MQ} &= -\frac{2}{9}AB^2 + \frac{2}{9}AD^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

3. On a $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MQ}$ sont orthogonaux, ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{QM}$ et $\overrightarrow{QP}$, et les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PN}$.

Donc le quadrilatère MNPQ admet trois angles droits.

MNPQ est donc un rectangle.

4. D'après le théorème de Pythagore dans les triangles PCN rectangle en C et MNB rectangle B, on a :

$$NP^2 = PC^2 + CN^2 \text{ et } MN^2 = MB^2 + BN^2.$$

Or $PC = BN$ et $CN = MB$.

Donc $MN = NP$.

MNPQ est donc un rectangle admettant deux côtés consécutifs égaux. Il s'agit donc d'un carré.

5. On cherche les coordonnées des points C, M et P dans le repère $(A ; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD})$.

$$\text{On a } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$= 3 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 3 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = 3 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = 2 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 3 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

Donc dans le repère $(A ; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD})$, les coordonnées des points A, C, M et P sont :

$A(0 ; 0), C(3 ; 3), M(1 ; 0)$ et $P(2 ; 3)$.

Le centre du carré ABCD est le milieu I de [AC]. Ses coordonnées sont $I(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$.

En effet :

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_A + x_C}{2} \\ &= \frac{0 + 3}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_I &= \frac{y_A + y_C}{2} \\ &= \frac{0 + 3}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Le centre du carré MNPQ est le milieu J de [MP]. Ses coordonnées sont $J(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$.

En effet :

$$\begin{aligned} x_J &= \frac{x_M + x_P}{2} \\ &= \frac{1 + 2}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_J &= \frac{y_M + y_P}{2} \\ &= \frac{0 + 3}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc $I = J$ car ils ont les mêmes coordonnées.

Les carrés MNPQ et ABCD ont le même centre.