

166 1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} = \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Puis on applique l'expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -1 \times 4 + 3 \times 3$$

$$= -4 + 9$$

$$= 5$$

On applique la définition du produit scalaire :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \times BC}$$

Puis on calcule les normes des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$BA = \sqrt{(-1)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9}$$

$$= \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9}$$

$$= 5$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \cos(\widehat{ABC}) &= \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \times BC} \\ &= \frac{5}{\sqrt{10} \times 5} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

À l'aide de la touche $\cos^{-1}$, acos ou arcsin de la calculatrice en mode degrés, on obtient $\widehat{ABC} \approx 72^\circ$ arrondi au degré près.

2. On effectue le développement ci-dessous :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{EF}\|^2 &= \|\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE}\|^2 \end{aligned}$$

$$= \|\overrightarrow{DF}\|^2 + \|\overrightarrow{DE}\|^2 - 2\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DE}$$

Puis on applique la définition du produit scalaire :

$$EF^2 = DF^2 + DE^2 - 2 \times DF \times DE \times \cos(\widehat{EDF})$$

$$= 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos(60^\circ)$$

$$= 136 - 120 \times \frac{1}{2}$$

$$= 136 - 60$$

$$= 76$$

$$\text{Donc } EF = \sqrt{76}$$

$$= \sqrt{4 \times 19}$$

$$= 2\sqrt{19}$$

$$\approx 8,7 \text{ cm arrondi au millimètre près.}$$