

159 Calcul de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$: B est le projeté orthogonal de C sur (AB) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= AB^2 \\ &= 5^2 \\ &= 25\end{aligned}$$

Calcul de $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}$:

Première méthode : Soit I le projeté orthogonal de O sur (BC), alors I est le milieu de [BC]. En effet, les droites (OI) et (CD) sont perpendiculaires à la droite (BC) donc (OI) et (CD) sont parallèles. Or O est le milieu de [DB] donc I est le milieu de [BC] d'après la réciproque du théorème de la droite des milieux.

$$\begin{aligned}\text{Donc } \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BO} \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI} \\ &= BC \times BI \text{ car } \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{BI} \text{ sont colinéaires et de même sens.} \\ &= BC \times \frac{1}{2}BC \\ &= \frac{1}{2}BC^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 3^2 \\ &= \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Deuxième méthode : en remarquant que $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ et que C est le projeté orthogonal de D sur (BC) car ABCD est un rectangle.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}BC^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 3^2 \\ &= \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Calcul de $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{AB}$:

Première méthode : A est le projeté orthogonal de D sur (AB) et soit J le projeté orthogonal de O sur (AB) alors J est le milieu de [AB]. En effet, les droites (OJ) et (DA) sont perpendiculaires à la droite (AB) donc (OJ) et (DA) sont parallèles.

Or O est le milieu de [DB] donc J est le milieu de [AB] d'après la réciproque du théorème de la droite des milieux.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{2} DC^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 5^2 \\ &= \frac{25}{2}.\end{aligned}$$

Deuxième méthode : en remarquant que $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BD}$ et que A est le projeté orthogonal de D sur (AB) car ABCD est un rectangle.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{AB} &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \cdot (-\overrightarrow{BA}) \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= \frac{1}{2} BA^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 5^2 \\ &= \frac{25}{2}.\end{aligned}$$