

172

1. On peut conjecturer que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $f(x)$ est positif sur $\mathbb{R}$.

2. a. Pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{2}e \times e^x - e^{-1} \times e^{\frac{1}{2}x}$.

Pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{2}e \times e^x - e^{-1} \times \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$.

Donc $f'(x) = \frac{1}{2}e^1 \times e^x - \frac{1}{2}e^{-1} \times e^{\frac{1}{2}x}$.

Soit $f'(x) = \frac{1}{2}e^{x+1} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-1}$.

En factorisant par $\frac{1}{2}$, on obtient : $f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x+1} - e^{\frac{1}{2}x-1})$.

b. $e^{x+1} - e^{\frac{1}{2}x-1} \geq 0$ équivaut à $e^{x+1} \geq e^{\frac{1}{2}x-1}$

donc à $x + 1 \geq \frac{1}{2}x - 1$

donc à $\frac{1}{2}x \geq -2$

soit à $x \geq -4$.

Donc $f'(x)$ est positif sur $[-4 ; +\infty[$ et négatif sur $] -\infty ; -4]$.

c. On déduit de la question précédente que :

f est décroissante sur $] -\infty ; -4]$ et croissante sur $[-4 ; +\infty[$.

Par conséquent, la fonction f admet un minimum en -4 .

Ce minimum est égal à : $f(-4) = \frac{1}{2}e^{-4+1} - e^{\frac{1}{2} \times (-4) - 1} = -\frac{1}{2}e^{-3}$.

3. La fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

$f(-4) < 0$ donc $f(x)$ n'est pas positif sur $\mathbb{R}$.

Les conjectures de la question 1. ne sont pas validées.