

135 1. Réponse a.

Les positions relatives entre C_f et C_g sont données par le signe de $h(x) = f(x) - g(x)$.

Alors $h(x) = -x^3 - 6x - (x^2 - 3x - 18) = -x^3 - x^2 - 3x + 18$ et $h'(x) = -3x^2 - 2x - 3$.

Le discriminant de ce polynôme du second degré est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 4 - 36 = -32$.

Puisque $\Delta < 0$, $h'(x)$ n'a pas de racine réelle. Son signe est celui du coefficient de x^2 (de valeur -3).

Par conséquent, $h'(x) < 0$ pour tout réel x et h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $h(2) = -2^3 - 2^2 - 3 \times 2 + 18 = -8 - 4 - 6 + 18 = 0$.

On en déduit le tableau de signes de h :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$

Par conséquent, C_f est au-dessus de C_g sur $]-\infty ; 2]$ et au-dessous sur $[2 ; +\infty[$.

2. Réponse c.

Les positions relatives entre C_f et T sont données par le signe de $h(x) = x^3 + x^2 - (5x - 3) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

Alors $h'(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

Le discriminant de ce polynôme du second degré est $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 4 + 60 = 64$.

Puisque $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{-5}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times 3} = 1.$$

Le signe de $h'(x)$ est celui du coefficient de x^2 (de valeur 3) à l'extérieur de l'intervalle des racines.

On en déduit le tableau de signes de $h'(x)$ ainsi que le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\frac{-5}{3}$	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$h(x)$				

Le minimum de h sur $\left[\frac{-5}{3}; +\infty\right]$ est 0 donc $h(x) \geq 0$ sur cet intervalle.

De plus, $h(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 5 \times (-3) + 3 = -27 + 9 + 15 + 3 = 0$.

Comme h est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty ; \frac{-5}{3}]$ avec $h(-3) = 0$,

alors $h(x) \leq 0$ sur $]-\infty ; -3]$ et $h(x) \geq 0$ sur $[-3 ; \frac{-5}{3}]$ donc sur $[-3 ; +\infty[$.

On en déduit que la courbe C est au-dessus de la tangente T sur $[-3 ; +\infty[$.