

135 1. a. f est le quotient de deux fonctions dérivables sur l'intervalle $] -6 ; +\infty[$, u et v sont définies par $u(x) = 2x + 3$ et par $v(x) = x + 6$. $v(x)$ ne s'annule pas sur $] -6 ; +\infty[$.

f est donc dérivable sur $] -6 ; +\infty[$

b. $f = \frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.

Donc pour tout $x \in] -6 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(x+6) - 1(2x+3)}{(x+6)^2} = \frac{2x+12-2x-3}{(x+6)^2} = \frac{9}{(x+6)^2}$.

2. a. L'équation réduite de la tangente T est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

On a $f'(0) = \frac{9}{(0+6)^2} = \frac{9}{36} = 0,25$ et $f(0) = \frac{2 \times 0 + 3}{0+6} = \frac{3}{6} = 0,5$.

L'équation réduite de T est donc $y = 0,25x + 0,5$.

b. Pour étudier les positions relatives de T et C_f , on cherche le signe de $f(x) - (0,25x + 0,5)$.

Pour tout $x \in] -6 ; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) - (0,25x + 0,5) &= \frac{2x+3}{x+6} - 0,25x - 0,5 = \frac{2x+3}{x+6} + \frac{(-0,25x - 0,5)(x+6)}{x+6} \\ &= \frac{2x+3}{x+6} + \frac{-0,25x^2 - 1,5x - 0,5x - 3}{x+6} \\ &= \frac{2x+3 - 0,25x^2 - 2x - 3}{x+6} = \frac{-0,25x^2}{x+6} \end{aligned}$$

$-0,25x^2$ est toujours négatif car un carré est toujours positif et s'annule pour $x = 0$.

$x + 6$ est strictement positif sur $] -6 ; +\infty[$

On peut alors construire le tableau de signes de $f(x) - (0,25x + 0,5)$:

x	-6	0	$+\infty$
$-0,25x^2$	$-$	0	$-$
$x+6$	$+$		$+$
$f(x) - (0,25x + 0,5)$	$-$	0	$-$

On en déduit que sur $] -6 ; +\infty[$, $f(x) \leq 0,25x + 0,5$ donc C_f est située en dessous de T .

3. Soit a un nombre appartenant à $] -6 ; +\infty[$.

La tangente au point d'abscisse a est parallèle à la droite d'équation $y = 4x - 7$

si et seulement si $f'(a) = 4$.

On cherche donc s'il existe $a > -6$ tel que $\frac{9}{(a+6)^2} = 4$.

On résout : $\frac{9}{(a+6)^2} = 4 \Leftrightarrow 4(a+6)^2 = 9 \Leftrightarrow (a+6)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow (a+6)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a+6 = \frac{3}{2} \text{ ou } a+6 = -\frac{3}{2}$.

L'équation a donc deux solutions : $\frac{3}{2} - 6 = -4,5$ et $-\frac{3}{2} - 6 = -7,5$.

Il existe donc deux tangentes à C_g parallèles à la droite d'équation $y = 4x - 7$, il s'agit des tangentes aux points d'abscisses $-4,5$ et $-7,5$.