

128 1. Pour tout x réel, $g'(x) = 3x^2 - 2x + 3$.

2. Soit a un réel. La tangente au point d'abscisse a est parallèle à la droite d'équation $y = 4x + 5$ si et seulement si $g'(a) = 4$.

On cherche donc s'il existe a tel que $3a^2 - 2a + 3 = 4$.

On résout : $3a^2 - 2a + 3 = 4 \Leftrightarrow 3a^2 - 2a - 1 = 0$.

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16$.

L'équation a donc deux solutions : $\frac{2 + \sqrt{16}}{3 \times 2} = \frac{2 + 4}{6} = 1$ et $\frac{2 - \sqrt{16}}{3 \times 2} = \frac{2 - 4}{6} = -\frac{1}{3}$.

Il existe donc deux tangentes à C_g parallèles à la droite d'équation $y = 4x + 5$, il s'agit des tangentes aux points d'abscisses 1 et $-\frac{1}{3}$.

3. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse $-\frac{1}{3}$ est $y = g'\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + g\left(-\frac{1}{3}\right)$.

$$g'\left(-\frac{1}{3}\right) = 4$$

et

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{1}{3}\right) &= \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \\ &= -\frac{1}{27} - \frac{3}{27} - 1 + 2 = -\frac{4}{27} + \frac{27}{27} = \frac{23}{27} \end{aligned}$$

L'équation devient alors $y = 4\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{23}{27}$ c'est-à-dire $y = 4x + \frac{4}{3} + \frac{23}{27}$ d'où $y = 4x + \frac{36}{27} + \frac{23}{27}$.

Conclusion : l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse $-\frac{1}{3}$ est $y = 4x + \frac{59}{27}$.

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$.

$$g'(1) = 4 \text{ et } g(1) = 13 - 1^2 + 3 \times 1 + 2 = 1 - 1 + 3 + 2 = 5.$$

L'équation réduite est donc $y = 4(x - 1) + 5 = 4x + 1$.