

176 1. a. Dans le triangle AHC, M est un point de [AH], N est un point de [AC] et les droites (MN) et (HC) sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB).

On en déduit d'après le théorème de Thalès que : $\frac{AM}{AH} = \frac{MN}{CH}$.

On a : $AM = x$; $AH = AB - BH = 12 - 4 = 8$ et $CH = 6$.

On en déduit alors : $\frac{x}{8} = \frac{MN}{6}$ donc $8 \times MN = 6x$ donc $MN = \frac{6x}{8} = \frac{3x}{4}$.

b. Dans le triangle BHC, Q est un point de [BH], P est un point de [BC] et les droites (QP) et (HC) sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB).

On en déduit d'après le théorème de Thalès que : $\frac{BQ}{BH} = \frac{QP}{CH}$.

On a : $BH = 4$; $QP = MN = \frac{3x}{4}$ et $CH = 6$.

On en déduit alors : $\frac{QB}{4} = \frac{\frac{3x}{4}}{6}$ donc $6 \times QB = 4 \times \frac{3x}{4}$ donc $6 \times QB = 3x$ et on obtient : $QB = \frac{3x}{6} = \frac{x}{2}$.

c. On a : $MQ = AB - AM - QB = 12 - x - \frac{x}{2}$ donc $MQ = 12 - \frac{3x}{2}$.

2. a. $S(x) = MN \times MQ = \frac{3x}{4} \times \left(12 - \frac{3x}{2}\right)$ pour tout réel x de $[0 ; 8]$.

b. Pour tout réel x de $[0 ; 8]$, $S(x) = \frac{3x}{4} \times 12 - \frac{3x}{4} \times \frac{3x}{2} = 9x - \frac{9x^2}{8} = -\frac{9}{8}x^2 + 9x$.

3. a. On résout l'équation $S(x) = 10$ qui équivaut à $-\frac{9}{8}x^2 + 9x = 10$ donc à $-\frac{9}{8}x^2 + 9x - 10 = 0$.

On calcule le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = 9^2 - 4 \times \left(-\frac{9}{8}\right) \times (-10) = 81 - \frac{9}{2} \times 10 = 81 - 45 = 36.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation $-\frac{9}{8}x^2 + 9x - 10 = 0$ a deux racines :

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{36}}{2 \times \left(-\frac{9}{8}\right)} = \frac{-9 - 6}{-\frac{9}{4}} = 15 \times \frac{4}{9} = \frac{20}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-9 + \sqrt{36}}{2 \times \left(-\frac{9}{8}\right)} = \frac{-9 + 6}{-\frac{9}{4}} = 3 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{3}.$$

Comme $\frac{20}{3} \in [0 ; 8]$, et $\frac{4}{3} \in [0 ; 8]$, il existe deux valeurs de x pour lesquelles l'aire de MNPQ est égale à 10 : $\frac{20}{3}$ et $\frac{4}{3}$.

b. On résout l'inéquation $S(x) \geq 10$ qui équivaut à $-\frac{9}{8}x^2 + 9x - 10 \geq 0$.

On a vu dans la question précédente que le polynôme du second degré $-\frac{9}{8}x^2 + 9x - 10$ a deux racines : $\frac{4}{3}$ et $\frac{20}{3}$.

Comme de plus le coefficient de x^2 dans ce polynôme est négatif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	0	$\frac{4}{3}$		$\frac{20}{3}$	8
$-\frac{9}{8}x^2 + 9x - 10$	-	0	+	0	-

On a donc $S(x) \geq 10$ pour les valeurs de x de l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; \frac{20}{3}\right]$.

4. S est une fonction polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est négatif.

S admet donc un maximum en $\alpha = \frac{-9}{2 \times (-\frac{9}{8})} = \frac{-9}{-\frac{9}{4}} = 9 \times \frac{4}{9} = 4$.

L'aire de MNPQ est donc maximale lorsque x est égal à 4.