165 **a.** Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $u'\mathrm{e}^u$.
● Pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{7x-2}$.
$f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = 7x - 2$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $u'(x) = 7$.
Donc, pour tout réel x, $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = 7\mathrm{e}^{7x-2}$.

● Pour tout réel x, $g(x) = \mathrm{e}^{-5x^2+x-3}$.
$g(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = -5x^2 + x - 3$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $u'(x) = -10x + 1$.
Donc, pour tout réel x, $g'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = (-10x + 1)\mathrm{e}^{-5x^2+x-3}$.

b. ● Pour tout réel x, $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x} - 1$.
On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :
* $u'(x) = 1$
* $v(x) = \mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e}^{w(x)}$ avec $w(x) = 1 - x$ et $w'(x) = -1$ d'où :
$v'(x) = w'(x)\mathrm{e}^{w(x)} = -\mathrm{e}^{1-x}$.
Donc, pour tout réel x :
$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + 0 = \mathrm{e}^{1-x} - x\,\mathrm{e}^{1-x} = (1 - x)\mathrm{e}^{1-x}$.

● Pour tout nombre réel x, $g(x) = (3 - x)\mathrm{e}^{-3x}$.
On pose $u(x) = 3 - x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-3x}$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :
* $u'(x) = -1$
* $v(x) = \mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{w(x)}$ avec $w(x) = -3x$ et $w'(x) = -3$ d'où :
$v'(x) = w'(x)\mathrm{e}^{w(x)} = -3\mathrm{e}^{-3x}$.
Donc, pour tout réel x:
$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -\mathrm{e}^{-3x} - 3(3 - x)\mathrm{e}^{-3x} \\ &= (-1 - 9 + 3x)\mathrm{e}^{-3x} = (3x - 10)\mathrm{e}^{-3x}. \end{aligned}$$