Chapitre 8

Intégration

Revoir des points essentiels

120 **a.** $\int_0^1 (2x+7)dx = \ [x^2+7x]_0^1 = 8.$

b. $\int_0^1 (5x^2+7)dx = \left[\frac{5}{3}x^3+7x\right]_0^1 = \frac{5}{3}+7 = \frac{5}{3}+\frac{21}{3} = \frac{26}{3}.$

c. $\int_2^3 (2x^2-3)dx = \left[\frac{2}{3}x^3-3x\right]_2^3 = \frac{2}{3}\times 3^3 - 3\times 3 - \left(\frac{2}{3}\times 2^3 - 3\times 2\right) = \frac{29}{3}.$

d. $\int_{-1}^3 (3x^2-1)\ dx = [x^3-x]_{-1}^3 = 3^3 - 3 - ((-1)^3-(-1)) = 24.$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x)dx = [\sin(x)\ ]_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin(0) = 0{,}5.$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(x)dx = [-\cos(x)\ ]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos(\ 0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-\sqrt{3}-2}{2}.$

g. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\cos(x)dx = [3\sin(x)\ ]_0^{\frac{\pi}{3}} = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\sin(0) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

h. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin(x)\ dx = [-4\cos(x)\ ]_0^{\frac{\pi}{3}} = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4\cos(\ 0) = 2.$

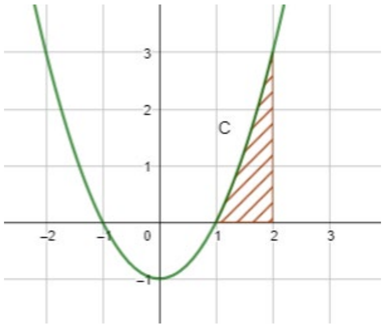
i. $\int_0^1 4x(2x^2+1)dx = \left[\frac{(2x^2+1)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$

j. $\int_{-1}^2 (3x-1)^2 dx = \left[\frac{(3x-1)^3}{9}\right]_{-1}^2 = \frac{125}{9} - \frac{(-64)}{9} = 21.$

k. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(4x)dx = \left[\frac{1}{4}\sin(4x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\sin(\pi) - \frac{1}{4}\sin(0) = 0.$

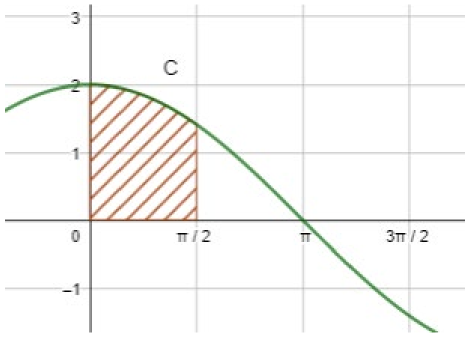
l. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x)dx = \left[\frac{-1}{4}\cos(4x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{4}\cos(\pi) + \frac{1}{4}\cos(0) = 0{,}5.$

121 Dans le graphique ci-contre, a été hachurée la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
Étudions le signe de l'expression $x^2 - 1$ sur [1 ; 2].
$x^2 - 1 > 0$ équivaut à $x^2 > 1$, ce qui est vérifié quand x est dans [1 ; 2].



Donc $x^2 - 1 > 0$ sur [1 ; 2].
$\int_1^2 (x^2 - 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$.

122 Dans le graphique ci-contre, a été hachurée la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.
Étudions le signe de l'expression $2\cos(0{,}5x)$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.
$2\cos(0{,}5x) > 0$ équivaut à $\cos(0{,}5x) > 0$, ce qui est vérifié quand x est dans $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.
Donc $2\cos(0{,}5x) > 0$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(0{,}5x)dx = \left[\frac{2}{0{,}5}\sin(0{,}5x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.



123 Sur le graphique ci-contre, a été hachurée la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 5$.
Or pour tout x positif, $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ est positif.
$\int_2^5 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \left[\frac{-1}{x^2+1}\right]_2^5 = \frac{-1}{26} - \left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{21}{130}$.