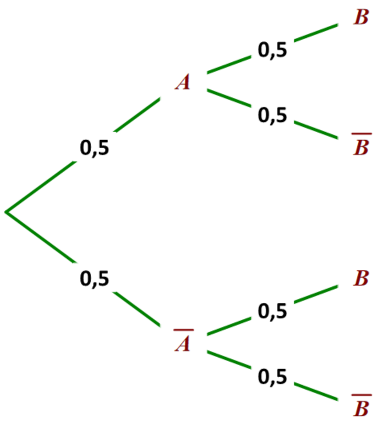
91 On établit un arbre à partir des informations de l'énoncé.
Puisque la pièce est équilibrée, la probabilité d'obtenir PILE au premier lancer est $P(A) = 0,5$, comme la probabilité d'obtenir PILE au second lancer, d'où $P_A(B) = 0,5$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0,5$.



1. VRAI.
La probabilité d'obtenir PILE au second lancer est $P(B)$.
Deux chemins mènent à B : celui passant par A et celui passant par $\overline{A}$ puisque A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,
$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.
Ainsi, $P(B) = 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,25 + 0,25$ donc $P(B) = 0,5$.
On en déduit que $P_A(B) = P(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

2. VRAI.
Les événements qui permettent d'obtenir au moins un PILE sont : $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $A \cap B$.
Ainsi, $P(C) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,75$.

3. FAUX.
Lorsque l'événement A est réalisé, l'événement C l'est aussi donc l'événement C est inclus dans l'événement A. On en déduit $P(A \cap C) = P(C) = 0,75$.
D'autre part, $P(A) \times P(C) = 0,5 \times 0,75 = 0,375 \neq P(A \cap C)$.
On en déduit que les événements A et C ne sont pas indépendants.