Chapitre 6
Primitives et équations différentielles

Revoir des points essentiels

97 **1.** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 4x+1$ est de la forme $u + v + w$ avec u, v et w définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = -3x^2$, $v(x) = 4x$ et $w(x) = 1$.
On sait qu'une primitive d'une constante a est la fonction $x \mapsto ax$,
une primitive de la fonction $x \longmapsto x$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}x^2$,
et une primitive de la fonction $x \longmapsto x^2$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{3}x^3$.
On peut alors trouver une primitive de chacune des fonctions u, v et w ; ce sont les fonctions U, V et W définies sur $\mathbb{R}$ par : $U(x) = -x^3$, $V(x) = 4 \times \frac{1}{2}x^2 = 2x^2$ et $W(x) = x$.
Donc une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -x^3 + 2x^2 + x$.
Remarque : on peut vérifier que $F'(x) = f(x)$.

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8x^3 - 3x+5$ est de la forme $u + v + w$ avec u, v et w définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 8x^3$, $v(x) = -3x$ et $w(x) = 5$.
On peut alors trouver une primitive de chacune des fonctions u, v et w ; ce sont les fonctions U, V et W définies sur $\mathbb{R}$ par : $U(x) = 8\times\frac{1}{4}x^4 = 2x^4$, $V(x) = -3\times\frac{1}{2}x^2 = -1{,}5x^2$ et $W(x) = 5x$.
Donc une primitive de la fonction g est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :
$G(x) = 2x^4 - 1{,}5x^2 + 5x$.
On peut vérifier que $G'(x) = g(x)$.

3. La fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = 4x - \frac{7}{x}$ est de la forme $u + v$ avec u et v définies sur $]0; +\infty[$ par : $u(x) = 4x$ et $v(x) = -\frac{7}{x}$.
On remarque que $v(x) = -7 \times \frac{1}{x}$ et on sait qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est la fonction $x \longmapsto \ln(x)$.
On peut donc trouver une primitive de chacune des fonctions u et v ; ce sont les fonctions U et V définies sur $]0; +\infty[$ par $U(x) = 4\times\frac{1}{2}x^2 = 2x^2$ et $V(x) = -7 \times \ln(x)$.
Donc une primitive de la fonction h est la fonction H définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$H(x) = 2x^2 - 7\ln(x)$.
On peut vérifier que $H'(x) = h(x)$.

4. La fonction j définie sur $]0\,;+\infty[$ par $j(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est de la forme $u + v$ avec u et v définies sur $]0\,;+\infty\,[$ par $u(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $v(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

On sait qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est la fonction $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ et une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$. est la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$.

Donc une primitive de la fonction j est la fonction J définie sur $]0\,,+\infty\,[$ par :

$J(x) = -\left(-\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x}$ c'est-à-dire $J(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$.

On peut vérifier que $J\,'(x) = j(x)$.

5. La fonction p définie sur $]\frac{3}{2}\,;+\infty[$ par $p(x) = \frac{2}{2x-3}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec u définie par : $u(x) = 2x - 3$.

Or, on sait qu'une primitive d'une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ avec u strictement positive est la fonction $\ln(u)$. Ici u est strictement positive sur $]\frac{3}{2}\,,+\infty[$ donc une primitive de la fonction p est la fonction P définie sur $]\frac{3}{2}\,,+\infty[$ par $P(x) = \ln(2x - 3)$.

On peut vérifier que $P'(x) = p(x)$.

6. La fonction q définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = \frac{2x}{x^2+5}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2 + 5$.

Or, on sait qu'une primitive d'une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ avec u strictement positive est la fonction ln (u). Ici u est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc une primitive de la fonction q est la fonction Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = \ln(x^2 + 5)$.

On peut vérifier que $Q'(x) = q(x)$.

98 **1.** L'équation différentielle $y' + 4y = 8$ équivaut à l'équation différentielle :
$y' = -4y + 8$; cette équation est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -4$ et $b = 8$.
On cherche la solution particulière constante de cette équation de la forme $p(x) = k$.
Puisque la fonction p est une solution de l'équation différentielle (E) on a :
$p'(x) = -4p(x) + 8$ pour tout réel x.
Or, $p'(x) = 0$ donc $4p(x) = 8$, soit $p(x) = 2$.
La solution constante de (E) est donc la fonction p telle que $p(x) = 2$.
L'équation différentielle $y' = -4y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\,e^{-4x}$ avec C réel.
On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = C\,e^{-4x} + 2$, avec C constante réelle.

2. L'équation différentielle $y' = -3y + 2$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -3$ et $b = 2$.
On cherche la solution particulière constante de (E) : $y' = -3y + 2$, de la forme $p(x) = k$.
Puisque la fonction p est une solution de cette équation différentielle (E) on a :
$p'(x) = -3p(x) + 2$ pour tout réel x.

Or, $p'(x) = 0$ donc : $3\,p(x) = 2$, soit $p(x) = \frac{2}{3}$.

La solution constante de cette équation est donc la fonction p telle que $p(x) = \frac{2}{3}$.

L'équation différentielle $y' = -3y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-3x}$ avec C réel.

On en déduit que les solutions de cette équation sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-3x} + \frac{2}{3}$, avec C constante réelle.

3. L'équation différentielle $y' + 7y = 14$ équivaut à l'équation différentielle $y' = -7y + 14$; cette équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -7$ et $b = 14$.

On cherche la solution particulière constante de cette équation de la forme $p(x) = k$.

Puisque la fonction p est une solution de l'équation différentielle (E), on a :

$p'(x) = -7p(x) + 14$ pour tout réel x.

Or, $p'(x) = 0$ donc $7p(x) = 14$, soit $p(x) = 2$.

La solution constante de cette équation est donc la fonction p telle que $p(x) = 2$.

L'équation différentielle $y' = -7y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-7x}$ avec C réel.

On en déduit que les solutions de cette équation sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-7x} + 2$, avec C constante réelle.

4. L'équation différentielle $y' = 6 - 2y$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -2$ et $b = 6$.

On cherche la solution particulière constante de (E) : $y' = 6 - 2y$ de la forme $p(x) = k$.

Puisque la fonction p est une solution de l'équation différentielle (E) on a :

$p'(x) = 6 - 2p(x)$ pour tout réel x.

Or, $p'(x) = 0$ donc $6 - 2p(x) = 0$, soit $p(x) = 3$.

La solution constante de (E) est donc la fonction p telle que $p(x) = 3$.

L'équation différentielle $y' = -2y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-2x}$ avec C réel.

On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + 3$, avec C constante réelle.

5. L'équation différentielle $y' = 9y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{9x}$ avec C réel.

6. L'équation différentielle $y' - \frac{1}{4}y = 1$ équivaut à l'équation différentielle $y' = \frac{1}{4}y + 1$; cette équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \frac{1}{4}$ et $b = 1$.

On cherche la solution particulière constante de (E) : $y' = \frac{1}{4}y + 1$ de la forme $p(x) = k$.

Puisque la fonction p est une solution de l'équation différentielle (E) on a :

$p'(x) = \frac{1}{4}p(x) + 1$ pour tout réel x.

Or, $p'(x) = 0$ donc $-\frac{1}{4}p(x) = 1$, soit $p(x) = -4$.

La solution constante de (E) est donc la fonction p telle que $p(x) = -4$.

L'équation différentielle $y' = \frac{1}{4}y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x}$ avec C réel.

On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x} - 4$ avec C constante réelle.

7. L'équation différentielle $y' + 11y = 0$ équivaut à l'équation différentielle $y' = -11y$; cette équation différentielle est de la forme $y' = ay$ avec $a = -11$.
Elle admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-11x}$ avec C réel.

8. L'équation différentielle $y' = \frac{y}{2} - 4$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -4$.

On cherche la solution particulière constante de (E) : $y' = \frac{1}{2}y - 4$, de la forme $p(x) = k$.

Puisque la fonction p est une solution de l'équation différentielle (E) on a :

$p'(x) = \frac{1}{2}p(x) - 4$ pour tout réel x.

Or, $p'(x) = 0$ donc $\frac{1}{2}p(x) = 4$, soit $p(x) = 8$.

La solution constante de (E) est donc la fonction p telle que $p(x) = 8$.

L'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ avec C réel.

On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + 8$ avec C constante réelle.