Chapitre 4
Fonction logarithme népérien

Revoir des points essentiels

47 ln $(x-2)$ et ln $(x+6)$ existent si et seulement si,

$x-2>0$ et $x+6>0$ ce qui équivaut à $x>2$ et $x>-6$ donc à $x>2$.

Pour x de $]2\,;+\infty[$, l'équation équivaut à $\ln\big((x-2)(x+6)\big)=\ln(2^4\times 3)$

soit à $\ln(x^2+4x-12)=\ln(48)$ donc à $x^2+4x-12=48$,

ce qui équivaut à $x^2+4x-60=0$.

On résout l'équation du second degré : $x^2+4x-60=0$.

Cette équation a pour discriminant $\Delta=4^2-4\times 1\times(-60)=16+240=256$.

L'équation $x^2+4x-60=0$ a donc deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$\frac{-4-\sqrt{256}}{2}=\frac{-4-16}{2}=-10$ et $\frac{-4+\sqrt{256}}{2}=\frac{-4+16}{2}=6$.

Comme le réel -10 n'appartient pas à $]2;+\infty[$ et 6 appartient à $]2;+\infty[$, l'équation

$\ln(x-2)+\ln(x+6)=4\ln(2)+\ln(3)$ a pour unique solution 6.

148 ln $(x+3)$ et ln $(x+7)$ existent si et seulement si,

$x+3>0$ et $x+7>0$ ce qui équivaut à $x>-3$ et $x>-7$ donc à $x>-3$.

Pour x de $]-3;+\infty[$, l'équation équivaut à $\ln\big((x+3)(x+7)\big)=\ln(5\times 3^2)$

soit à $\ln(x^2+10x+21)=\ln(45)$ donc à $x^2+10x+21=45$,

ce qui équivaut à $x^2+10x-24=0$.

On résout l'équation du second degré : $x^2+10x-24=0$.

Cette équation a pour discriminant $\Delta=10^2-4\times 1\times(-24)=100+96=196$.

L'équation $x^2+10x-24=0$ a donc deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$\frac{-10-\sqrt{196}}{2}=\frac{-10-14}{2}=-12$ et $\frac{-10+\sqrt{196}}{2}=\frac{-10+14}{2}=2$.

Comme le réel -12 n'appartient pas à $]-3;+\infty[$ et 2 appartient à $]-3;+\infty[$, l'équation

$\ln(x+3)+\ln(x+7)=\ln(5)+2\ln(3)$ a pour unique solution 2.

149 ln (x – 7) et ln (x + 4) existent si et seulement si,

x – 7 > 0 et x + 4 > 0 ce qui équivaut à x > 7 et x > – 4 donc à x > 7.

Pour x de $]7;+\infty[$, l'inéquation équivaut à $\ln\big((x-7)(x+4)\big) < \ln(2 \times 13)$

soit à $\ln(x^2 - 3x - 28) = \ln(26)$ donc à $x^2 - 3x - 28 < 26$,

ce qui équivaut à $x^2 - 3x - 54 < 0$.

On détermine les éventuelles racines du polynôme du second degré $x^2 - 3x - 54$.

Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-54) = 225$.

Le polynôme a donc deux racines :

$x_1 = \frac{3-\sqrt{225}}{2} = \frac{3-15}{2} = -6$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{225}}{2} = \frac{3+15}{2} = 9$.

Comme le coefficient de x^2 du polynôme $x^2 - 3x - 54$ est positif, ce polynôme est strictement négatif dans l'intervalle entre ses racines donc dans l'intervalle $]-6\,;9[$.

Comme $]-6\,;9[\cap]7;+\infty[=]7\,;9[$, l'inéquation ln ($x$ – 7) + ln (x + 4) < ln (2) + ln (13) a pour ensemble solution l'intervalle $]7\,;9[$.

150 La fonction f est la somme de deux fonctions, dont le second membre est de la forme ln (u) avec $u(x) = x^2 - 1$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $]1;+\infty[$ et $u'(x) = 2x$ donc la fonction $x \mapsto \ln(x^2-1)$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{2x}{x^2-1}$.

On en déduit que :

$f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{3(x^2-1)}{x(x^2-1)} + \frac{2x^2}{x(x^2-1)} = \frac{3x^2-3+2x^2}{x(x^2-1)} = \frac{5x^2-3}{x(x^2-1)}$.

151 La fonction f est le produit de deux fonctions u et v telles que :

$u(x) = x$ et $v(x) = 1 + \ln(x)$.

Les fonctions u et v sont dérivables et pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

On a donc $f'(x) = 1 \times (1 + \ln(x)) + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln(x) + 1 = 2 + \ln(x)$.

152 La fonction f est le quotient de deux fonctions u et v telles que :

$u(x) = \ln(x) + 3$ et $v(x) = x^2 + 1$.

Les fonctions u et v sont dérivables et pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$.

On a donc $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times(x^2+1)-(\ln(x)+3)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x+\frac{1}{x}-2x\ln(x)-6x}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{1}{x}-2x\ln(x)-5x}{(x^2+1)^2}$

et en multipliant le numérateur et le dénominateur par x on obtient :

$f'(x) = \frac{1-2x^2\ln(x)-5x^2}{x(x^2+1)^2}$.