**85** **1.** ■ D'une part, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x \to 0} -x^2 + 1 = 1$.

Par somme de limites, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$

■ D'une part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 + 1 = -\infty$.

Par somme de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

**2.** D'après l'énoncé, $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 + 1$.

L'expression de sa dérivée est : $f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 2x$.

Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, l'expression $\frac{-1}{x^2}$ est négative, de même que l'expression $-2x$.

Par somme, l'expression $f'(x)$ est négative sur cet intervalle.

On en déduit le tableau ci-dessous :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

**3. a.** Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, le tableau de variation indique que la fonction $f$ est continue et strictement décroissante.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ donc 0 appartient à $]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) ; \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée $\alpha$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

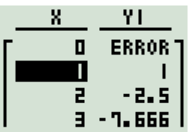
**b.** Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(\alpha) = 0$.

Puisque $f$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, $f(x) > 0$ sur l'intervalle $]0 ; \alpha[$ et $f(x) < 0$ sur l'intervalle $]\alpha ; +\infty[$. On en déduit le tableau de signe de l'énoncé :

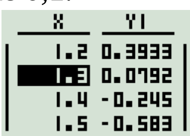
| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**c.** Pour déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 près de la solution $\alpha$ de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ :

**1.** On commence le balayage à $x = 0$ avec un pas de 1.




**2.** On forme ensuite un tableau de valeurs de $f(x)$ sur [1 ; 2] avec un pas de 0,1.




À l'aide de la calculatrice, on a $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.