145 **1.** Avec le changement de fonction inconnue $z = y'$, on obtient $z' = y''$, et l'équation différentielle devient : $z' - 4z = 1$, soit $z' = 4z + 1$.
C'est une équation de la forme $z' = az + b$, avec $a = 4$ et $b = 1$.
L'ensemble des solutions de cette équation **(E')** est l'ensemble des fonctions de la forme $x \longmapsto f(x) + p(x)$, où f est une solution de l'équation $y' = 4y$ et p la solution particulière constante de **(E')**.

- La solution particulière constante p de l'équation **(E')** est telle que $p(x) = k$, où k est un réel. On a : $p'(x) = 0$ d'où $0 = 4p(x) + 1$, soit $0 = 4k + 1$, soit $k = -\frac{1}{4}$.

La solution particulière constante a pour expression : $p(x) = -\frac{1}{4}$ pour tout réel x.

L'équation $y' = 4y$ a pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{4x}$, où C est un réel.
D'où l'expression des fonctions solutions de l'équation **(E')** : $x \longmapsto Ce^{4x} - \frac{1}{4}$, où C est un réel.

2. Puisque $z = y'$, on doit résoudre l'équation $y' = Ce^{4x} - \frac{1}{4}$, ce qui revient à déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $x \longmapsto Ce^{4x} - \frac{1}{4}$.
$e^{4x} = \frac{1}{4} \times 4e^{4x} = \frac{1}{4} u'(x)e^{u(x)}$, avec $u(x) = 4x$.
Une primitive de $u'e^u$ est e^u, donc une primitive de $x \longmapsto e^{4x}$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{4} e^{4x}$.
Une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{4}$ est $x \longmapsto \frac{1}{4}x$.
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle **(E)** est formé des fonctions de la forme $x \longmapsto \frac{C}{4} e^{4x} - \frac{1}{4}x + D$, avec C et D réels.