

**139 1.** Pour tout réel  $x > 0$ , puisque  $G(x) = \frac{g(x)}{x}$ , alors  $G'(x) = \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2}$ .

D'où, pour tout réel  $x > 0$ ,  $xg'(x) - g(x) = x^2 G'(x)$ , soit  $g(x) - xg'(x) = -x^2 G'(x)$ ,

On a aussi, pour  $x > 0$  :  $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+2)} - \frac{x+2}{x(x+2)} = \frac{x-x-2}{x(x+2)} = \frac{-2}{x(x+2)}$ .

Ainsi,  $g$  possède la propriété P si et seulement si, pour tout réel  $x$  de  $]0 ; +\infty[$  :

$-x^2 G'(x) = \frac{2x}{x+2}$ , soit  $G'(x) = \frac{2x}{-x^2(x+2)}$ , soit  $G'(x) = \frac{-2}{x(x+2)}$ , ce qui équivaut à  $G(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$ .

**2.** Une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x+2}$  sur  $]0 ; +\infty[$  est la fonction  $x \mapsto \ln(x+2)$ .

Une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $]0 ; +\infty[$  est la fonction  $x \mapsto \ln(x)$ .

Ainsi, pour tout réel  $x > 0$ ,  $G(x) = \ln(x+2) - \ln(x) + k$ , où  $k$  est un réel.

Puisque  $G(x) = \frac{g(x)}{x}$ , on a  $g(x) = xG(x)$ .

Donc **(E)** est l'ensemble des fonctions définies sur  $]0 ; +\infty[$  telles que  $x \mapsto xG(x)$ , c'est-à-dire  $x \mapsto x\ln(x+2) - x\ln(x) + kx$ , où  $k$  est un réel.