Sujet C

1. La pente de la tangente au point d’abscisse x de la courbe représentative de f est égale à $f'(x)$. La somme des coordonnées du point d’abscisse x de la courbe de f est $x + f(x)$.
La condition de l’énoncé conduit à la relation $f'(x) = 2(x + f(x))$, pour tout réel x.
Donc f vérifie l’équation différentielle $y' = 2x + 2y$.

2. Soit u la fonction affine telle que $u(x) = ax + b$, avec a et b réels.
u est une solution de l’équation **(E)** si et seulement si, pour tout réel x, $u'(x) = 2u(x) + 2x$.
Puisque $u'(x) = a$, ceci équivaut à $a = 2(ax + b) + 2x$, soit $a = (2a + 2)x + 2b$.
Cette égalité est vérifiée pour tout réel x si et seulement si $2a + 2 = 0$ et $a = 2b$,
ce qui donne $a = -1$ et $b = -\frac{1}{2}$.
Ainsi, la fonction affine u telle que $u(x) = -x - \frac{1}{2}$ est solution de **(E)**.

3. **(E)** est une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$, donc l’ensemble des solutions de **(E)** est l’ensemble des fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} + p(x)$, où C est une constante réelle et p une solution particulière de **(E)**.
On connaît une solution particulière u de **(E)**, donc les fonctions solutions de **(E)** sont de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{2x} - x - \frac{1}{2}$, où C est une constante réelle.

4. a. La fonction g est une solution de l’équation **(E)**, donc il existe une constante C telle que, pour tout réel x, $g(x) = C\mathrm{e}^{2x} - x - \frac{1}{2}$.
$g(0) = \frac{1}{2}$, soit $C - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, soit $C = 1$.
On en déduit : $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - x - \frac{1}{2}$.

b. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 1$.
$g'(x) \geq 0$ équivaut à $2\mathrm{e}^{2x} - 1 \geq 0$, soit $\mathrm{e}^{2x} \geq \frac{1}{2}$, soit $2x \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ soit $x \geq -\frac{\ln(2)}{2}$.
Donc, g est décroissante sur $]-\infty\,;\, -\frac{\ln(2)}{2}]$ et croissante sur $[-\frac{\ln(2)}{2}\,;\,+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$,car $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{2x}) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$.
$g(x) = 2x\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}\right) = +\infty$ d’où $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} - \frac{1}{2}\right) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

c. Voir la courbe ci-contre.