119 **1.** L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
Or $f'(x) = -2\sin(x) + 2(x)$.
$f(0) = 2\cos(0) + 0^2 - 2 = 2 \times 1 + 0 - 2 = 0$
$f'(0) = -2\sin(0) + 2 \times 0 = -2 \times 0 + 0 = 0$
Donc $y = 0(x - 0) + 0$.
Donc une équation de la tangente T est $y = 0$.

2. On étudie le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.
$f''(x) = -2\cos(x) + 2 = -2(\cos(x) - 1)$
Or pour tout réel x, on a $\cos(x) \leq 1$.
Donc $\cos(x) - 1 \leq 0$.
Donc $-2(\cos(x) - 1) \geq 0$.
Donc, pour tout réel x, on a $f''(x) \geq 0$.
Ainsi f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3. a. f est convexe sur $\mathbb{R}$, donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur $\mathbb{R}$.
Donc, pour tout réel x, on a $f(x) \geq 0$.

b. On en déduit, pour tout réel x, $2\cos(x) + x^2 - 2 \geq 0$, c'est-à-dire $\cos(x) \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$.