Chapitre 7
Fonction logarithme népérien

Revoir des points essentiels

161 ln $(x + 3)$ et ln $(x - 5)$ existent si et seulement si $x + 3 > 0$ et $x - 5 > 0$ ce qui équivaut à :
$x > -3$ et $x > 5$ donc à $x > 5$.
Pour x de $]5 ; +\infty[$, l'équation équivaut à $\ln((x + 3)(x - 5)) = \ln(3^2)$ soit à :
$\ln(x^2 - 2x - 15) = \ln(9)$ donc à $x^2 - 2x - 15 = 9$ ce qui équivaut à $x^2 - 2x - 24 = 0$.
On résout l'équation du second degré : $x^2 - 2x - 24 = 0$.
Cette équation a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-24) = 100$.
L'équation $x^2 - 2x - 24 = 0$ a donc deux solutions dans $\mathbb{R}$:
$\frac{2-\sqrt{100}}{2\times1} = \frac{2-10}{2} = -4$ et $\frac{2+\sqrt{100}}{2\times1} = \frac{2+10}{2} = 6$.
Comme le réel -4 n'appartient pas à $]5 ; +\infty[$ et 6 appartient à $]5 ; +\infty[$,
l'équation $\ln(x + 3) + \ln(x - 5) = 2\ln(3)$ a pour unique solution 6.

162 ln $(x - 7)$ et ln $(x + 4)$ existent si et seulement si $x - 7 > 0$ et $x + 4 > 0$ ce qui équivaut à :
$x > 7$ et $x > -4$ donc à $x > 7$.
Alors, pour x de $]7 ; +\infty[$, l'inéquation équivaut à $\ln((x - 7)(x + 4)) < \ln(2^2 \times 3)$ soit à :
$\ln(x^2 - 3x - 28) < \ln(12)$ donc à $x^2 - 3x - 28 < 12$ ou encore à $x^2 - 3x - 40 < 0$.
On détermine les éventuelles racines du polynôme du second degré $x^2 - 3x - 40$.
Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-40) = 169$.
Ce polynôme a donc deux racines : $\frac{3-\sqrt{169}}{2\times1} = \frac{3-13}{2} = -5$ et $\frac{3+\sqrt{169}}{2\times1} = \frac{3+13}{2} = 8$.
Comme le coefficient de x^2 du polynôme $x^2 - 3x - 40$ est positif ce polynôme est strictement négatif entre ses deux racines soit dans l'intervalle $]-5 ; 8[$.
Comme $]7 ; +\infty[\cap]-5 ; 8[=]7 ; 8[$, l'ensemble solution de l'inéquation est $]7 ; 8[$.

163 ln $(x + 1)$ existe si et seulement si $x + 1 > 0$ soit $x > -1$.
$\ln(x^2 - 3x + 2)$ existe si et seulement si $x^2 - 3x + 2 > 0$.
On détermine les éventuelles racines du polynôme du second degré $x^2 - 3x + 2$.
Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$.
Ce polynôme a donc deux racines : $\frac{3-\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{3-1}{2} = 1$ et $\frac{3+\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{3+1}{2} = 2$.
$x^2 - 3x + 2$ est un polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est positif, ainsi,
$x^2 - 3x + 2 > 0$ pour x appartenant à $]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[$.
Finalement, ln $(x + 1)$ et $\ln(x^2 - 3x + 2)$ existent si et seulement si x appartient à :
$]-1 ; +\infty[\cap (]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[)$ soit à $]-1 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$.

Alors, pour x de $]-1\ ;\ 1[\cup]2\ ;\ +\infty[$,
l'équation équivaut à $\ln(2(x^2-3x+2)) \geq \ln(x+1)$ soit à $2x^2-6x+4 \geq x+1$
ou encore à $2x^2-7x+3 \geq 0$.
On détermine les éventuelles racines du polynôme du second degré $2x^2-7x+3$.
Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = (-7)^2-4\times 2\times 3 = 25$.
Ce polynôme a donc deux racines : $\frac{7-\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{7+\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{7+5}{4} = 3$.
$2x^2-7x+3$ est un polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est positif, ainsi,
$2x^2-7x+3 \geq 0$ pour x appartenant à $\left(\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[3;+\infty[\right)$.
Comme $\left(\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[3;+\infty[\right)\cap(]-1\ ;\ 1[\cup]2\ ;\ +\infty[) = \left]-1;\frac{1}{2}\right]\cup[3;+\infty[$, l'ensemble solution de l'inéquation est $\left]-1;\frac{1}{2}\right]\cup[3;+\infty[$.

164 L'expression $v(x) = \ln(x-1)$ est de la forme $\ln(w(x))$ avec $w(x) = x-1$.
La fonction w est dérivable et pour tout réel x de $]1;+\infty[$: $w'(x) = 1$.
Ainsi, la dérivée de $v(x) = \ln(x-1)$ est $v'(x) = \frac{1}{x-1}$.
Alors, f est de la forme $u\times v$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = \ln(x-1)$.
Les fonctions u et v sont dérivables et pour tout réel x de $]1;+\infty[$ $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \frac{1}{x-1}$.
Ainsi, la fonction f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $f'(x) = 2\times\ln(x-1)+2x\times\frac{1}{x-1}$
soit $f'(x) = 2\ln(x-1)+\frac{2x}{x-1}$.

165 L'expression $(\ln(x))^2$ est de la forme $u(x)^2$ avec $u(x) = \ln(x)$.
La fonction u est dérivable et pour tout réel x de $]0;+\infty[$: $u'(x) = \frac{1}{x}$.
Ainsi, la dérivée de $(\ln(x))^2$ est $2\times\frac{1}{x}\times\ln(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$.
Alors, la dérivée de $f(x) = (\ln(x))^2+4\ln(x)$ est $\frac{2\ln(x)}{x}+4\times\frac{1}{x}$ soit $f'(x) = \frac{2\ln(x)+4}{x}$.

166 f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2\ln(x)+3$ et $v(x) = x$.
Les fonctions u et v sont dérivables et pour tout réel x de $]0;+\infty[$ $u'(x) = \frac{2}{x}$ et $v'(x) = 1$.
Ainsi, la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{\frac{2}{x}\times x-(2\ln(x)+3)\times 1}{x^2} = \frac{2-2\ln(x)-3}{x^2}$
soit $f'(x) = \frac{-2\ln(x)-1}{x^2}$.