SUJET D

1. $f'(x) = 0{,}5 \times 2x - 7 + 6 \times \frac{1}{x} = x - 7 + \frac{6}{x} = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

2. a. Sur [1 ; 9], $x > 0$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 7x + 6$.

On détermine les éventuelles racines du polynôme du second degré $x^2 - 7x + 6$.
Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$.

Ce polynôme a donc deux racines : $\frac{7-\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{7-5}{2} = 1$ et $\frac{7+\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{7+5}{2} = 6$.

$x^2 - 7x + 6$ est un polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est positif, ainsi, $x^2 - 7x + 6 > 0$ pour x appartenant à $]-\infty ; 1[\cup]6 ; +\infty[$.

$f(1) = 0{,}5 \times 1^2 - 7 \times 1 + 14 + 6 \ln(1) = 7{,}5$.

$f(6) = 0{,}5 \times 6^2 - 7 \times 6 + 14 + 6 \ln(6) = 6 \ln(6) - 10 \approx 0{,}75$.

$f(9) = 0{,}5 \times 9^2 - 7 \times 9 + 14 + 6 \ln(9) = 12 \ln(3) - 8{,}5 \approx 4{,}68$.

On obtient le tableau de variations :

x	1		6		9
$f'(x)$	0	–	0	+	
$f(x)$	7,5	↘	0,75	↗	4,68

b. Sur l'intervalle [6 ; 9], $f(x) < 5$, l'équation $f(x) = 5$ n'a donc pas de solution.

Sur l'intervalle [1 ; 6], f est continue et strictement décroissante,
$5 \in [6 \ln(6) - 10 ; 7{,}5]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α.

c. À l'aide de la calculatrice, on obtient $f(2{,}55) \approx 5{,}018 > 5$ et $f(2{,}56) \approx 4{,}997 < 5$, soit $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$.

d. À la fin de l'exécution de l'algorithme, la variable X contient la valeur 2,56, première valeur au centième près pour laquelle $Y \leq 5$.

3. Le tableau de variation permet d'affirmer que le minimum de f est environ 0,75 pour $x = 6$, ce qui signifie que le coût moyen est minimum pour une production de 600 pneus et que ce coût moyen est d'environ 75 euros.