98 **1.** Pour tout réel x de [0 ; 2], f est de la forme $\sqrt{u}$ avec, pour tout x appartenant à [0 ; 2], $u(x) = 3 + \frac{1}{2}x$ et $u'(x) = \frac{1}{2}$. Ainsi $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour tout réel x de [0 ; 2] : $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{3+\frac{1}{2}x}}$; $f'(x) > 0$ sur [0 ; 2] donc f croît sur [0 ; 2].

x	0	2
f	$\sqrt{3}$ ↗	2

2. Pour tout naturel $n \geq 1$, soit la propriété $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ ».

$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $u_2 = \sqrt{3 + \frac{1}{2} \times u_1} = \sqrt{3 + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{12+\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{12+\sqrt{2}}$.

$u_1 \approx 0{,}7$ et $u_2 \approx 1{,}8$ donc $P(1)$ est vraie car $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 2$.

Soit n un naturel non nul fixé tel que $P(n)$ est vraie, prouvons que $P(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ et comme sur [0 ; 2], f est croissante, on a :

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$, c'est-à-dire $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$ ce qui donne bien :

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence $P(n)$ est vraie.

3. (u_n) est croissante majorée donc converge, vers un réel L qui vérifie $L = f(L)$ car f est continue sur [0 ; 2] et pour tout naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur [0 ; 2], l'équation $f(x) = x$ équivaut à $3 + 0{,}5x = x^2$ ce qui équivaut à $x^2 - 0{,}5x - 3 = 0$.

C'est une équation du second degré.

Le discriminant est $\Delta = \frac{49}{4}$ donc $\Delta > 0$; il y a donc deux solutions : $x = -1{,}5$ ou $x = 2$ or (u_n) est minorée par 0 donc $L = 2$.