Chapitre 5
Fonctions : limite et dérivation

Revoir des points essentiels

165 **1.** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} 2 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} (3 - x) = 0^-$ car si $x > 3$, alors $3 - x < 0$.

Donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} \frac{2}{3-x} = -\infty$.

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} (x - 1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} (2 - x) = 0^+$ car si $x < 2$, alors $2 - x > 0$.

Donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{x-1}{2-x} = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + e^x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2 + e^x} = 0$.

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (2 + e^x) = 2$ et par conséquent, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2 + e^x} = \frac{1}{2}$.

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - x^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - 5) = +\infty$

donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - x^2)(\sqrt{x} - 5) = -\infty$.

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^3) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^3 + \frac{2}{x}) = +\infty$.

7. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-4x^2 + 9) = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 + 9) = -\infty$.

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1$ donc par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + e^x + 1) = -\infty$.

9. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = -1$ donc par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x (e^x - 1) = 0$.

10. $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} e^x = e^4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} (x - 4) = 0^-$ car si $x < 4$, $x - 4 < 0$.

Donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} \frac{e^x}{x-4} = -\infty$.

166 **1.** Pour tout réel x,

$f = e^u$ avec $u(x) = -x^2 + 1$ et $u'(x) = -2x$

donc $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = -2xe^{-x^2+1}$.

2. Pour tout réel x,
$f = 2e^u$ avec $u(x) = 3x + 1$ et $u'(x) = 3$
donc $f'(x) = 2u'(x)e^{u(x)} = 2 \times 3e^{3x+1} = 6e^{3x+1}$.

3. Pour tout réel x,
$f = 0{,}5e^u$ avec $u(x) = 2 - x^2$ et $u'(x) = -2x$
donc $f'(x) = 0{,}5u'(x)e^{u(x)} = 0{,}5 \times (-2x)\, e^{2-x^2} = -x\, e^{2-x^2}$.

4. Pour tout réel x,
$f = u^3$ avec $u(x) = 4x^2 - 1$ et $u'(x) = 8x$
$f' = 3u'u^{3-1} = 3u'u^2$
donc $f'(x) = 3 \times 8x\,(4x^2 - 1)^2 = 24x\,(4x^2 - 1)^2$.

5. Pour tout réel x,
$f = u^4$ avec $u(x) = 3x^2 - 1$ et $u'(x) = 6x$
$f' = 4u'u^{4-1} = 4u'u^3$
donc $f'(x) = 4 \times 6x\,(3x^2 - 1)^3 = 24x(3x^2 - 1)^3$.

6. Pour tout réel x,
$f = u^5$ avec $u(x) = e^x - 1$ et $u'(x) = e^x$
$f' = 5u'u^{5-1} = 5u'u^4$
donc $f'(x) = 5u'(x)(u(x))^4 = 5e^x(e^x - 1)^4$

7. Pour tout réel x,
$f = \frac{1}{u^2} = u^{-2}$ avec $u(x) = x^2 + 5$ et $u'(x) = 2x$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas $\mathbb{R}$.
$(u^{-2})' = -2u'u^{-2-1} = -2u'u^{-3} = -\frac{2u'}{u^3}$
donc pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{2 \times 2x}{(x^2+5)^3} = -\frac{4x}{(x^2+5)^3}$

8. Pour tout réel x,
$f = 5\frac{1}{u^3} = 5u^{-3}$ avec $u(x) = x^2 + 5$ et $u'(x) = 2x$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas $\mathbb{R}$.
$(u^{-3})' = -3u'u^{-3-1} = -3u'u^{-4} = -\frac{3u'}{u^4}$
donc $f' = 5 \times \left(-\frac{3u'}{u^4}\right) = -\frac{15u'}{u^4}$
donc pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{15 \times 2x}{(x^2+5)^4} = -\frac{30x}{(x^2+5)^4}$.

9. Pour tout réel x,
$f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 5x^2 + 1$ et $u'(x) = 10x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2+1}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2+1}}$.

10. Pour tout réel x,
$f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 - x + 8$ et $u'(x) = 2x - 1$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+8}}$.