164 1. • $\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} (3x^2) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} (-10x) = +\infty$
donc par somme : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} (3x^2) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (-10x) = -\infty$.
On est en présence de la forme indéterminée « ∞ – ∞ ». On factorise $f(x)$ par son terme prépondérant.
Pour tout réel x non nul, $f(x) = x^4 \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{10}{x^3}\right)$.
$\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{10}{x^3}\right) = 1$
donc par produit : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. **• Sens de variation de f'**
Pour tout réel x, $f'(x) = 4x^3 + 6x - 10$
Pour étudier le sens de variation de f', on étudie le signe de sa dérivée.
Pour tout réel x, $f''(x) = 12x^2 + 6$. $f''(x) > 0$ donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

• Calcul de la limite de f' en $-\infty$
$\lim_{x\to-\infty} (4x^3) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} (6x - 10) = -\infty$
Donc par somme : $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$.

Calcul de la limite de f' en $+\infty$
$\lim_{x\to+\infty} (4x^3) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (6x - 10) = +\infty$
Donc par somme : $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

• Calcul de l'image de 1
$f'(1) = 4 + 6 - 10 = 0$.

3. Si $x \leq 1$, alors $f'(x) \leq f'(1)$ car f' est croissante sur $]-\infty ; 1]$
donc $f'(x) \leq 0$ car $f'(1) = 0$.
Si $x \geq 1$, alors $f'(x) \geq f'(1)$ car f' est croissante sur $[1 ; +\infty[$
donc $f'(x) \geq 0$ car $f'(1) = 0$.
Par conséquent : $f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty ; 1]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[1 ; +\infty[$.
On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-6	↗	$+\infty$