163 **1.** $\lim\limits_{x \to 0} (2e^{x} + 1) = 2e^{0} + 1 = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (e^{x} - 1) = 0^{+}$

car si $x > 0$ alors $e^x > 1$ et donc $e^x - 1 > 0$.

Donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

2. a. Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{2e^{x} + 1}{e^{x} - 1} = \dfrac{e^{-x}(2e^{x} + 1)}{e^{-x}(e^{x} - 1)} = \dfrac{2 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + e^{-x}) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$

donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées,

est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

4. a. Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$,

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2e^x + 1$ et $v(x) = e^x - 1$

$u'(x) = 2e^x$ et $v'(x) = e^x$

$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$,

$f'(x) = \dfrac{2e^{x}(e^{x} - 1) - (2e^{x} + 1)e^{x}}{(e^{x} - 1)^2} = \dfrac{2(e^{x})^2 - 2e^{x} - 2(e^{x})^2 - e^{x}}{(e^{x} - 1)^2} = \dfrac{-3e^{x}}{(e^{x} - 1)^2}$

b. Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $-3e^x < 0$ et $(e^x - 1)^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$.

Par conséquent, f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.