112 **a.** On a pour tout entier naturel n, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$,

donc $-\left(\frac{99}{100}\right)^{\mathrm{n}} \leq \left(\frac{99}{100}\right)^{\mathrm{n}} \sin(n) \leq \left(\frac{99}{100}\right)^{n}$.

Donc $-\left(\frac{99}{100}\right)^{n} \leq u_n \leq \left(\frac{99}{100}\right)^{n}$.

Or $-1 < \frac{99}{100} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\frac{99}{100}\right)^{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^{n} = 0$.

Donc, d'après le théorème des « gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$
donc $4^n - 1 \leq 4^n - (-1)^n \leq 4^n + 1$.
L'inégalité $4^n - (-1)^n \leq 4^n + 1$ ne permet pas de déterminer la limite de la suite mais l'inégalité $4^n - 1 \leq 4^n - (-1)$ permet d'utiliser un théorème de comparaison.
On a $4 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et par la règle sur la limite d'une somme $\lim\limits_{n\to+\infty} (4^n - (-1)^n) = +\infty$. Donc, par comparaison, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c. Or $-1 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$ et, par la règle sur la limite d'une somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (4 - 0{,}9^n) = 4$.
De même, $-1 < 0{,}1 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}1^n = 0$ et, par la règle sur la limite d'une somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 + 0{,}1^n = 4$.
D'après le théorème des « gendarmes », on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.