108 **a.** On a pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1 :
$-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $2n^2 - 1 \leq 2n^2 + (-1)^n \leq 2n^2 + 1$.
On divise chaque membre par $n^2 - 1$ qui est strictement positif puisque $n > 1$,
donc $\frac{2n^2-1}{n^2-1} \leq u_n \leq \frac{2n^2+1}{n^2-1}$.
En étudiant les limites quand n tend vers $+\infty$ des quantités dans les membres de gauche et de droite de la double inégalité précédente on obtient la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
On factorise le numérateur et le dénominateur par n^2 pour n entier naturel strictement supérieur à 1, car c'est le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{2n^2-1}{n^2-1} = \frac{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{2-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2-\frac{1}{n^2}\right) = 2$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 1$.

Donc, d'après la règle sur la limite d'un quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = 2$.

De même, $\frac{2n^2+1}{n^2-1} = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$

$$= \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n^2}\right) = 2$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 1$.

Donc d'après la règle sur la limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = 2$.

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, $\frac{2n^2-1}{n^2-1} \leq u_n \leq \frac{2n^2+1}{n^2-1}$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2-1}{n^2-1} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2+1}{n^2-1} = 2$.
Donc, d'après le théorème des « gendarmes », la suite (u_n) converge vers 2.

b. Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leq -(-1)^n \leq 1$
donc $2n^3 - 1 \leq 2n^3 - (-1)^n \leq 2n^3 + 1$.
L'inégalité $2n^3 - (-1)^n \leq 2n^3 + 1$ ne permet pas de déterminer la limite de la suite mais l'inégalité $2n^3 - 1 \leq 2n^3 - (-1)^n$ permet d'utiliser un théorème de comparaison.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n^3 - 1) = +\infty$, donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Donc la suite (u_n) ne converge pas. Elle diverge et sa limite est $+\infty$.

c. On a pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1 :

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $\sqrt{n} - 1 \leq \sqrt{n} + (-1)^n \leq \sqrt{n} + 1$.
On divise chaque membre par n qui est strictement positif,
donc $\frac{\sqrt{n}-1}{n} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{n}+1}{n}$.
En étudiant les limites quand n tend vers $+\infty$ des quantités dans les membres de gauche et de droite de la double inégalité précédente on obtient la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
On factorise le numérateur par $\sqrt{n}$ et le dénominateur par n pour n entier naturel strictement supérieur à 1 car c'est le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n}-1}{n} &= \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Donc, d'après la règle sur la limite d'une somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}-1}{n}\right) = 0$.

De même, $\begin{aligned}\frac{\sqrt{n}+1}{n} &= \frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.\end{aligned}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Donc, d'après la règle sur la limite d'une somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1}{n}\right) = 0$.
Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, $\frac{\sqrt{n}-1}{n} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{n}+1}{n}$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n} = 0$.
Donc, d'après le théorème des « gendarmes », la suite (u_n) converge vers 0.