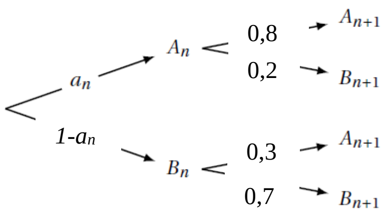
Sujet A

1. a. La probabilité de réalisation de l'événement B_n est notée b_n.

La probabilité de réalisation de A_{n+1} sachant que l'événement A_n est réalisé est égale à 0,8. La probabilité de réalisation de B_{n+1} sachant que l'événement A_n est réalisé est donc égale à $1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

La probabilité de réalisation de B_{n+1} sachant que l'événement B_n est réalisé est égale à 0,7. La probabilité de réalisation de A_{n+1} sachant que l'événement B_n est réalisé est donc égale à $1 - 0{,}7 = 0{,}3$.



b. D'après la formule des probabilités totales avec la partition (A_n ,B_n):

$a_{n+1} = P(A_{n+1})$

$= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1})$

$= P(A_n)\times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1})$

$= a_n \times 0{,}8 + (1 - a_n) \times 0{,}3$

$=0{,}5a_n+0{,}3$.

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}6$

$= 0{,}5a_n + 0{,}3 - 0{,}6$

$= 0{,}5a_n - 0{,}3$

$= 0{,}5(a_n - 0{,}6)$

$= 0{,}5u_n$.

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,5.

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $u_n = u_1 \times 0{,}5^{n-1}$.

Or $u_1 = a_1 - 0{,}6$

$= a - 0{,}6$.

Donc $u_n = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1}$.

Et : $a_n = u_n + 0{,}6$

$= (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6$.

4. On a $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^{n-1} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0{,}6$. La limite ne dépend pas de la valeur de a.