144 **1.** $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FI}$ d'après la relation de Chasles.
Comme $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, on a $\overrightarrow{JB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.
Comme ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle, ABFE est un rectangle donc $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$.
On en déduit que : $\overrightarrow{JI} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}$, d'après la relation de Chasles.
On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JK} &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{3}{4}\right)\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

2. $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$
puis en utilisant les propriétés de bilinéarité du produit scalaire, on obtient :
$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE}$.
Comme ABCD est un rectangle, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux donc :
$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
Comme ABFE est un rectangle, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux donc :
$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
Comme ADHE est un rectangle, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux donc :
$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$.
On a alors :
$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = -\frac{1}{8}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{8}AD^2 + \frac{1}{2}AE^2 = -\frac{1}{8} \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 = 0$.

3. Comme $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont orthogonaux.
On en déduit que le triangle IJK est rectangle en J.