141 **1.** On a $\overrightarrow{AB}(2\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $\vec{u}(-3\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et $\vec{v}(-2\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

On recherche deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AB} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$. Cela se traduit par le système :

$$\begin{cases} -3\alpha - 2\beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 0\beta = 2 \end{cases}.$$

On extrait les deux dernières équations et on résout le système obtenu :

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 2 \end{cases}.$$

On obtient alors $\alpha = 2$ et $\beta = -4$.

Il faut à présent s'assurer que la première égalité est vérifiée par ces valeurs :

$-3\alpha - 2\beta = -3 \times 2 - 2 \times (-4) = -6 + 8 = 2$ ce qui convient.

Ainsi $\overrightarrow{AB} = 2\,\vec{u} - 4\,\vec{v}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

2. On appelle C le point de la droite d tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ et on appelle D le point de la droite *d* ' tel que $\overrightarrow{BD} = \vec{v}$. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, les points A, B, C et D sont aussi coplanaires donc les droites *d* et *d* ' sont coplanaires.

De plus, $z_{\vec{v}} = 0$ mais $z_{\vec{u}} \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Comme les droites *d* et *d* ' sont coplanaires mais pas parallèles,

d et *d* ' sont forcément sécantes.

3. Une représentation paramétrique de *d* est $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

et une représentation paramétrique de *d* ' est $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 3 + k \\ z = -1 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

On recherche le couple $(t\ ;\ k)$ de réels solution du système :

$\begin{cases} -1 - 3t = 1 - 2k \\ 3 + 2t = 3 + k \\ -3 + t = -1 \end{cases}$. Ce système équivaut à $\begin{cases} -3t + 2k = 2 \\ 2t - k = 0 \\ t = 2 \end{cases}$

soit à $\begin{cases} -3 \times 2 + 2k = 2 \\ 2 \times 2 - k = 0 \\ t = 2 \end{cases}$ donc à $\begin{cases} k = 4 \\ k = 4 \\ t = 2 \end{cases}$, ce qui convient.

Le système a donc pour solution le couple (2 ; 4).

Par conséquent, *d* et *d* ' sont sécantes en un point C.

C est le point de *d* de paramètre 2 et C est aussi le point de *d* ' de paramètre 4.

On remplace, par exemple, *t* par 2 dans la représentation paramétrique de *d* :

$$\begin{cases} x_C = -1 - 3 \times 2 \\ y_C = 3 + 2 \times 2 \\ z_C = -3 + 2 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x_C = -7 \\ y_C = 7 \\ z_C = -1 \end{cases}.$$