Sujet F

1. La variable aléatoire X_n donne le nombre de succès (la pièce est défectueuse) dans une succession de n tirages supposés indépendants et dans des conditions identiques (le prélèvement de n pièces).
Elle suit donc la loi binomiale de paramètres n et p.
Dans ce cas on sait que $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1-p)$.

2. a. Le polynôme $p(1-p)$ a pour racines 0 et 1.
On a $p(1-p) = -p^2 + p$ donc le coefficient de p^2 est négatif : la fonction polynôme admet un maximum pour p égal à la moyenne des racines, soit $\frac{1}{2}$.
La valeur de ce maximum est $\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

b. On a $E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{E(X_n)}{n} = p$ et $V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{V(X_n)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$.
*P*our tout $\delta > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - E\left(\frac{X_n}{n}\right)\right| \geq \delta\right) \leq \frac{V\left(\frac{X_n}{n}\right)}{\delta^2}.$$

On a donc, avec ce qui a été calculé précédemment,
$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \delta\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$.
Or, d'après la question précédente $\frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$,
dont on déduit $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$.

3. On cherche une valeur de n telle que $P\left(\left|\frac{x_n}{n} - p\right| \leq 0{,}01\right) \geq 0{,}95$.
La question précédente nous montre, avec $\delta = 0{,}01$, que
$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq 0{,}01\right) \leq \frac{1}{4n0{,}01^2}$, soit $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq 0{,}01\right) \leq \frac{1}{0{,}00004n}$.
Comme $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq 0{,}01\right) + P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 0{,}01\right) = 1$,
$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 0{,}01\right)$ est supérieur à 0,95, autrement dit $\frac{X_n}{n}$ s'éloigne de p de moins de 10^{-2}avec une probabilité d'au moins 95 % si et seulement si :
$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq 0{,}01\right) \leq 0{,}05$.
D'après **2.b**, il suffit que $\frac{1}{4n \times 0{,}01^2} \leq 0{,}05$, soit $n \geq \frac{1}{40\,000 \times 0{,}05}$.
L'application numérique donne $n \geq 50\,000$.