Sujet C

Partie A

1. « La bille est vendable et provient de la machine A » correspond à l'événement $\mathrm{V} \cap \mathrm{A}$. On a $P(\mathrm{V} \cap \mathrm{A}) = P_{\mathrm{A}}(\mathrm{V}) \times P(\mathrm{A}) = 0{,}98 \times 0{,}6 = 0{,}588$.

2. Les événements A et B réalisant une partition de l'univers, on a :
$P(\mathrm{V}) = P(\mathrm{B} \cap \mathrm{V}) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{V})$
donc $P(\mathrm{B} \cap \mathrm{V}) = P(\mathrm{V}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{V}) = 0{,}96 - 0{,}588 = 0{,}372$.
La probabilité qu'une bille soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B est $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{V})$.
D'après la formule du cours, $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{V}) = \frac{P(\mathrm{V} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} = \frac{0{,}372}{0{,}4} = 0{,}93$.

3. Le technicien affirme que $P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{B}) = 0{,}7$.
D'après la formule du cours,
$P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{B})}{P(\overline{\mathrm{V}})} = \frac{P_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{V}}) \times P(\mathrm{B})}{1 - P(\mathrm{V})} = \frac{(1 - P_{\mathrm{B}}(\mathrm{V})) \times (1 - P(\mathrm{A}))}{1 - P(\mathrm{V})} = \frac{(1 - 0{,}93) \times (1 - 0{,}6)}{1 - 0{,}96} = 0{,}7$
donc le technicien a raison.

Partie B

1. a. Soit X la variable aléatoire qui, à un sachet de 40 billes, associe le nombre de billes de couleur noire.
Chacune des billes étant colorée au hasard avec une des cinq couleurs disponibles, on répète 40 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{5}$.
X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = \frac{1}{5}$.
À l'aide de la calculatrice (pages 372-373), on a $P(X = 10) \approx 0{,}107$.

b. Si les couleurs étaient équiréparties dans chaque sachet, il y aurait exactement 8 billes noires dans un sachet de 40 billes. La fluctuation d'échantillonnage suffit à expliquer l'existence d'un sachet avec 12 billes noires si le nombre 12 est dans un intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 du nombre de billes.
À l'aide de la calculatrice (pages 372-373), on trouve $P(X \leq 12) \approx 0{,}957$ donc on ne peut pas remettre en cause le réglage de la machine.

2. Soit n le nombre de billes total d'un sachet.
X suit alors la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}2$.
On cherche $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$. Or l'événement contraire de $\{X \geq 1\}$ est $\{X = 0\}$.
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^n$.
On cherche donc le plus petit entier naturel n tel que $1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99$ ce qui équivaut à $0{,}8^n \leq 0{,}01$, soit $\ln(0{,}8^n) \leq \ln(0{,}01)$, soit $n \times \ln(0{,}8) \leq \ln(0{,}01)$, soit $n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$ car $\ln(0{,}8) \leq 0$. Or $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx 20{,}63$, soit à partir de $n = 21$.
Le nombre minimal de billes que chaque sachet doit contenir est 21.