Sujet C

1. Il y a n boules qu'on doit ranger chacune dans un emplacement du casier qui en contient n. Il y a donc n possibilités pour ranger la boule numérotée 1.
Une case peut contenir de 0 à n boules, donc il y a toujours n possibilités pour ranger la boule numérotée 2.
De même, il y a n possibilités pour ranger la boule numérotée 3 etc.
Donc le nombre total de rangements possibles est égal à n^n.

2. a. Lorsque $n = 1$, on ne dispose que d'une boule et le casier ne contient qu'un seul emplacement. Dans ce cas, on est certain que cet unique emplacement qui compose le casier contienne la seule boule dont on dispose.
Or, P_1 est égal à la probabilité que ce seul emplacement ne contienne qu'une seule boule. Donc $P_1 = 1$.
Lorsque $n = 2$, on a 2 emplacements et 2 boules.
D'après la question **1**, il y a 2^2 soit 4 rangements possibles.
Parmi eux, seulement 2 permettent d'avoir une boule dans chaque emplacement : la boule numérotée 1 dans l'emplacement numéroté 1 et la boule numérotée 2 dans l'emplacement numéroté 2 **ou** la boule numérotée 1 dans l'emplacement numéroté 2 et la boule numérotée 2 dans l'emplacement numéroté 1.
Les boules sont placées au hasard donc les 4 rangements sont équiprobables.
Ainsi, $P_2 = \frac{2}{4} = 0{,}5$.

b. Les n emplacements du casier doivent contenir exactement une boule.
Pour la boule numérotée 1, on a n emplacements disponibles.
Pour la boule numérotée 2, il y a un emplacement qui est occupé, donc il ne reste que $n - 1$ emplacements libres.
Pour la boule numérotée 3, il y a deux emplacements qui ne sont pas libres (un occupé par la boule numérotée 1 et un autre occupé par la boule numérotée 2).
Il en reste donc $n - 2$, etc.
La boule numérotée n n'a donc plus qu'un emplacement de libre.
Ainsi, il y a $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$, soit $n!$, façons de ranger les n boules dans des emplacements différents.
Il y a au total n^n façons de ranger les n boules dans les n emplacements d'après la question **1**. Ces rangements étant équiprobables, la probabilité de ranger les boules dans des emplacements différents est égal à $\frac{n!}{n^n}$.
Donc $P_n = \frac{n!}{n^n}$.

c. Dans cette question, il suffit de calculer P_5.
Or, d'après la formule établie à la question précédente : $P_5 = \frac{5!}{5^5} \approx 0{,}04$.
Ainsi, la probabilité que chacune des 5 cases ne contient qu'une seule boule est environ égale à 0,04, au centième près.

3. a. Lors de l'appel `fac(5)`, l'entier n est égal à 5.
Au début du programme, la variable f est initialisée à 1.

On entre ensuite dans la boucle « **for** » : la variable *i* varie de 1 à 5, avec un pas de 1.
On peut alors résumer les valeurs successives prises par *f* à l'aide d'un tableau :

i		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
f	1	$1 \times 1 = 1$	$1 \times 2 = 2$	$2 \times 3 = 6$	$6 \times 4 = 24$	$24 \times 5 = 120$

Donc à la fin de la boucle « **for** », la variable *f* contient la valeur 120.
Le programme s'arrête après cette boucle et retourne la valeur stockée dans la variable *f*. Donc l'appel `fac(5)` retourne 120.

b. Dans le programme, la variable *i* varie de 1 à *n* avec un pas de 1.
Ainsi, la variable *f* prend comme valeurs, successivement : 1×1 c'est-à-dire 1, puis 1×2, puis $1 \times 2 \times 3$, puis $1 \times 2 \times 3 \times 4$, etc.
Lorsque *i* prend la valeur *n*, on affecte à *f* la valeur $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$, c'est-à-dire $n!$.
Donc la fonction `fac`, de paramètre *n* un entier naturel non nul, retourne le nombre $n!$.

c. D'après la question **2. b**, $P_n = \frac{n!}{n^n}$.
Pour obtenir $n!$, il suffit, d'après la question précédente, de faire appel à la fonction `fac`. De plus, pour obtenir n^n, il suffit de saisir « **n**n** » en langage Python. Par conséquent, on obtient le programme ci-contre.

```
def probabilite(n):
    return(fac(n)/n**n)
```

4. On démontre le résultat par récurrence.
Pour tout entier naturel non nul *n*, on note $P(n)$: « $P_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ».
Initialisation : on souhaite montrer que $P(1)$ est vraie,
c'est-à-dire que P_1 est bien inférieur ou égal à $\frac{1}{2^{1-1}}$.
Or, d'après la question **2. a**, $P_1 = 1$. De plus, $\frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$.
Ainsi, $P_1 = \frac{1}{2^{1-1}}$, donc $P_1 \leq \frac{1}{2^{1-1}}$. Donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité : soit *k* entier naturel tel que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $P_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.
On souhaite montrer alors que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $P_{k+1} \leq \frac{1}{2^{k+1-1}}$,
c'est-à-dire $P_{k+1} \leq \frac{1}{2^k}$.
D'après l'énoncé, on admet que $P_{k+1} \leq \frac{P_k}{2}$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $P_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.
Ainsi, $P_{k+1} \leq \frac{1}{2} P_k \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{k-1}}$.
Or, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}$, donc $P_{k+1} \leq \frac{1}{2^k}$.
Ainsi, $P(k+1)$ est vraie.
Par conséquent, la propriété $P(n)$ est héréditaire.
Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire.
Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul *n*, c'est-à-dire $P_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout entier naturel non nul *n*.