Sujet B

1. Dans cette question, on tire les trois jetons simultanément. Il n'y a donc pas d'ordre et pas de répétition possible (on ne peut pas tirer plusieurs fois le même jeton).

a. Il y a au total 10 jetons. Le nombre de tirages différents est donc égal au nombre de parties de 3 éléments issus d'un ensemble composé de 10 éléments, c'est-à-dire $\binom{10}{3}$.
Or, $\binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$.
Il y a donc 120 tirages différents.

b. Il y a 7 jetons blancs au total, donc le nombre de tirages composés de 3 jetons blancs, c'est-à-dire que tous les jetons tirés sont blancs, est égal au nombre de parties de 3 éléments issus d'un ensemble composé de 7 éléments. Ce nombre est égal à $\binom{7}{3}$.
Or, $\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$.
Il y a donc 35 tirages différents qui contiennent 3 jetons blancs.

c. On souhaite dénombrer les tirages composés de 2 jetons blancs et d'1 jeton noir.
Il y a 7 jetons blancs, donc le nombre de possibilités pour choisir 2 jetons blancs est égal à $\binom{7}{2}$. Or, $\binom{7}{2} = \frac{7\times6}{2} = 21$.
De plus, il y a 3 jetons noirs, donc le nombre de possibilités de choisir 1 jeton noir est égal à 3. Par le principe multiplicatif, le nombre de tirages composés de 2 jetons blancs et d'1 jeton noir est égal à 21×3, soit 63.

d. Il y a 6 jetons avec un numéro impair : le « 1 » blanc, le « 3 » blanc, le « 5 » blanc, le « 7 » blanc », le « 1 » noir et le « 3 » noir. Ainsi, le nombre de tirages de 3 jetons avec uniquement des chiffres impairs est égal à $\binom{6}{3}$. Or, $\binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$.
Il y a donc 20 tirages qui permettent de n'avoir que des jetons avec un chiffre impair.

2. Le nombre de manières de choisir simultanément 5 jetons parmi les 8 est $\binom{8}{5}$.
D'après la formule de Pascal, $\binom{8}{5} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5}$.
Or, d'après Asma, il y a 35 manières de choisir simultanément 4 jetons blancs. Il y a au total 7 jetons blancs donc le nombre de manières de choisir simultanément 4 jetons blancs est égal à $\binom{7}{4}$. Donc $\binom{7}{4} = 35$.
De même, d'après Asma, il y a 21 manières de choisir simultanément 5 jetons blancs. Il y a au total 7 jetons blancs donc le nombre de manières de choisir simultanément 5 jetons blancs est égal à $\binom{7}{5}$. Donc $\binom{7}{5} = 21$.
Ainsi, $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = 35 + 21 = 56$.
Par conséquent, $\binom{8}{5} = 56$, donc le nombre de manières de choisir simultanément 5 jetons parmi les 8 blancs (s'il y en avait 8) serait égal à 56.

3. Dans cette question, les trois tirages sont successifs et avec remise : il y a donc un ordre et les répétitions sont possibles.

a. Dénombrer les tirages successifs avec remise revient à dénombrer les 3-uplets d'un ensemble composé de 10 éléments. Or, ce nombre est égal à 10^3. Il y a donc 1 000 tirages successifs et avec remise différents.

b. Il y a 7 jetons blancs, donc dénombrer les tirages successifs avec remise composés uniquement de jetons blancs revient à dénombrer les 3-uplets d'un ensemble composé de 7 éléments. Or, ce nombre est égal à 7^3, c'est-à-dire 343.
Il y a donc 343 tirages successifs et avec remise qui ne sont composés que de jetons blancs.

c. On peut commencer par dénombrer les tirages pour lesquels les deux premiers jetons sont blancs (et le dernier est noir).
Il y a 7 possibilités pour le premier jeton qui est blanc, puis 7 possibilités pour le deuxième jeton qui est blanc, et enfin 3 possibilités pour le troisième jeton qui est noir.
Ainsi, le nombre de possibilités d'avoir les deux premiers jetons blancs puis un jeton noir est égal à $7 \times 7 \times 3$, c'est-à-dire 147.
Il reste à multiplier ce résultat par le nombre de possibilités de positionner les deux jetons blancs tirés. Cela revient à multiplier 147 par le nombre de possibilités de positionner l'unique jeton noir tiré : il est soit en 1re place, soit en 2^{e}, soit en 3^{e}.
Donc on multiplie 147 par 3, ce qui donne 441.
Il y a donc 441 manières de tirer successivement et avec remise 3 jetons et d'obtenir 2 jetons blancs et 1 jeton noir.

d. On rappelle qu'il y a 6 jetons numérotés avec un chiffre impair.
Le nombre de tirages successifs et avec remise de trois jetons qui permettent de n'avoir que des chiffres impairs est égal à 6^3, c'est-à-dire 216.

4. Le premier jeton est connu : c'est le jeton noir numéroté 2. Ce jeton n'est pas remis dans le sac. Il reste alors 9 jetons.
Lorsque Pascal tire le deuxième jeton, il a donc 9 possibilités.
Il ne remet pas ce deuxième jeton tiré dans le sac, qui en contient ensuite 8.
Pascal a donc 8 possibilités pour tirer le troisième jeton.
Par conséquent, le nombre total de tirages est égal à 9×8, c'est-à-dire 72.