Partie 3 Chapitre 4

VÉRIFIER SES CONNAISSANCES

1 Questions à choix multiple

A- 2

La variation absolue de la grandeur u entre deux paliers successifs est constante, égale à 2, donc u est une suite arithmétique de raison $r = 2$.
On en déduit : $u(n) = u(0) + nr = 3 + 2n$.

B- 4

Le taux de variation t de la grandeur u est constant, égal à 0,5, donc u est une suite géométrique de raison $q = 1 + t = 1{,}5$.
On en déduit : $u(n) = u(0) \times q^n = 4 \times 1{,}5^n$.

C- 3

Le taux de variation t de la population est constant, égal à 0,02, donc la grandeur u représentant la population est une suite géométrique de raison $q = 1 + t = 1{,}02$.
Alors, $u(n) = u(0) \times q^n = u(0) \times 1{,}02^n$.
Le temps de doublement est le plus petit entier n tel que $u(n) \geq 2\ u(0)$, ce qui équivaut à $1{,}02^n \geq 2$.
Un tableau de valeurs de la suite u obtenu avec une calculatrice fournit la valeur de n cherchée : $n = 36$.
Le temps de doublement de cette population est donc de 36 ans.

D- 3

Le taux de variation t est constant, égal à 0,01, donc la grandeur u représentant cette population est une suite

géométrique de raison $q = 1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$.
Pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) \times q^n = 100 \times 1{,}01^n$.
D'où $u(50) = 100 \times 1{,}01^{50}$. On en déduit : $u(50) \approx 164{,}5$.
L'effectif de cette population au bout de 50 ans à l'unité près est 164.

2 Restituer les notions essentielles du cours

Une grandeur varie de manière linéaire en fonction d'un palier entier n si sa variation absolue $u(n+1) - u(n)$ entre les paliers n et $n + 1$ est constante.

2. Une grandeur varie de manière exponentielle en fonction d'un palier entier n si son taux de variation $\frac{u(n+1)-u(n)}{u(n)}$ entre les paliers n et $n + 1$ est constant.

3. Le modèle démographique de Malthus fait l'hypothèse d'une croissance exponentielle de la population : il prévoit que l'effectif de la population croît vers l'infini si le taux de natalité est supérieur au taux de mortalité et qu'il décroît vers 0 sinon.

3 Comprendre un graphique

1. C'est le graphique **b**, car une variable discrète dont la croissance est linéaire est représentée graphiquement par une droite.

2. u est une suite arithmétique, donc $u(n) = u(0) + nr$, où r est la raison de la suite.
D'après le graphique, $u(0) = 1$ et $u(8) = 5$.
On en déduit : $u(n) = 1 + nr$, et ainsi $u(8) = 1 + 8r$.

Puisque $u(8) = 5$, alors $1 + 8r = 5$, soit $r = 0{,}5$.
On a donc : $u(n) = 1 + 0{,}5n$.
Ainsi, une équation de la droite passant par les points du nuage est $y = 0{,}5x + 1$.

4 Prévoir l'effectif d'une population

1. La variation absolue est :
$u(n + 1) - u(n) = 21\,000 - 20\,000 = 1\,000$.

2. Le taux de variation est :

$$\frac{u(n+1) - u(n)}{u(n)} = \frac{21\,000 - 20\,000}{20\,000} = 0{,}05.$$

3. Si on fait l'hypothèse d'un modèle linéaire pour cette grandeur u, alors pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) + nr$, où r est la raison de la suite arithmétique.
La population de la ville en 2020 est 20 000,
soit $u(0) = 20\,000$.
$r = 1\,000$, car la variation absolue est constante et égale à la raison de la suite.
D'où : $u(n) = 20\,000 + 1\,000\,n$.
L'année 2030 est l'année de rang $n = 10$.
$u(10) = 20\,000 + 1\,000 \times 10 = 30\,000$.
La population de cette ville en 2030 sera alors de 30 000 habitants.

4. Si on fait l'hypothèse d'un modèle exponentiel pour cette grandeur u, alors pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) \times q^n$, où q est la raison de la suite géométrique.
Le taux de variation t étant constant, égal à 0,05,
on a alors $q = 1 + t = 1{,}05$.

D'où : $u(n) = 20\,000 \times 1{,}05^n$.
$u(10) = 20\,000 \times 1{,}05^{10}$, soit $u(10) \approx 32\,578$, à l'unité près.
La population de cette ville en 2030 sera alors de 32 578 habitants.

5 Retour sur les problématiques

• **Comment les mathématiques permettent-elles de modéliser la dynamique des systèmes vivants afin de décrire leur évolution ?**

Les mathématiques modélisent la dynamique des systèmes vivants à l'aide de suites. Les deux principaux modèles, le modèle linéaire et le modèle exponentiel, utilisent respectivement des suites arithmétiques et des suites géométriques. On reconnaît un modèle possible avec des propriétés numériques (liées à la variation absolue et au taux de variation) ou avec des propriétés graphiques.

• **Quelles sont les différentes étapes de la démarche de modélisation mathématique ?**

La première étape de cette démarche est le recueil de données.
À partir de ces données et à l'aide d'outils numériques ou graphiques, on propose un modèle qui est en adéquation avec ces données : ce modèle est en général choisi parmi des modèles connus.
Le modèle étant fixé, on peut alors l'utiliser pour faire des prévisions.