6 **a.** $f'(x) = 3x^2 - 4 \times 2x + 5 = 3x^2 - 8x + 5$.

Le discriminant de $f'(x)$ est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 4$.

$\Delta > 0$ donc l'équation $f'(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2, avec :

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{4}}{2 \times 3} = \frac{8-2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{2 \times 3} = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$f'(x)$ est du signe du coefficient de x^2 (qui vaut $3 > 0$) à l'extérieur de l'intervalle des racines.

D'où le tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	

b. f est donc croissante sur $]-\infty ; 1]$, décroissante sur $[1 ; \frac{5}{3}]$ et croissante sur $[\frac{5}{3} ; +\infty[$.

c. f est croissante sur $[\frac{5}{3} ; +\infty[$ donc f est croissante sur $[2 ; +\infty[$.

f admet donc un minimum en 2.

Or $f(2) = 0$.

Donc, pour tout $x \geq 2$, on a $f(x) \geq 0$.

C'est-à-dire $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \geq 0$, ou encore $x^3 \geq 4x^2 - 5x + 2$.