

73 a. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2}$

et $f'(x)$ est du signe de $x - 1$ car $x > 0$ (et de fait $x + 1 > 0$).

Or $x - 1 \leq 0$ pour $x \leq 1$ et $x - 1 \geq 0$ pour $x \geq 1$.

Donc $f'(x) \leq 0$ pour $0 < x \leq 1$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$.

Donc f est décroissante sur $]0 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.

b. f admet donc un minimum en 1, égal à $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$.

Donc, pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$.