

133 1. g est de la forme $u \times v$, avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = \ln(x)$.

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $g' = uv' + u'v$.

$$u'(x) = 3x^2 \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x}.$$

D'où, pour $x > 0$: $g'(x) = x^3 \times \frac{1}{x} + 3x^2 \ln(x) = x^2 + 3x^2 \ln(x) = x^2(1 + \ln(x))$.

Ainsi, $g'(x) = f(x)$ pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, donc g est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

2. Soit g_1 la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$. Elle vérifie $g_1(1) = 0$.

Elle est de la forme : $g_1(x) = x^3 \ln(x) + k$, où k est une constante réelle.

$$g_1(1) = \ln(1) + k = k.$$

Puisque $g_1(1) = 0$, on en déduit : $k = 0$.

La primitive de f qui s'annule en 1 a pour expression : $g_1(x) = x^3 \ln(x)$.